標識グラフの数え上げ問題についての一考察

田澤　新成

An Enumeration of Labeled Graphs

Shinsei TAZAWA

This paper considers figures with vertices and edges as components, and discusses how many figures there are, with the aim of classifying them. These figures are called graphs. Graphs have been classified for many years on the basis of their various attributes. In this context, we encounter the problem of counting the number of graphs with the given properties. In graph theory, this problem has been called the enumeration problem. This paper considers an enumeration of labeled graphs. Riddell (1951) derived a simple, beautiful equation on an enumeration of labeled graphs. This paper shows a broad application of this equation.

1　序

点と辺を構成要素にする図形を取り扱い、考えられる図形が何通りあるかを考察する。これは、図形の分類に通ずる。図形はここではグラフと呼ばれる。グラフがもっている種々の属性に基づき、グラフを分類することが長年行われてきている。この中で、与えられた性質をもつグラフはいくつあるかという問題がある。個数を求める問題がグラフ論では、グラフの数え上げ問題といわれている。一方、グラフの基本的構成要素として点の個数が十分大きな場合のグラフの数え上げ問題はグラフ論ではグラフの極値問題といわれている。本稿では、点の個数が与えられた場合でのグラフの数え上げ問題に焦点を絞って論じることとする。

2　グラフの定義

まず、グラフとはどんなものであるかということを含めて少し広くグラフの定義をすることにする。

空でない有限集合 V を取り、V の元の対の集合 $\binom{V}{2}=\{\{i, j\}\subset V \mid i\neq j\}$ を定め、$N=\{0, 1, 2, \ldots\}$ に対し、V と写像 $\Phi : \binom{V}{2}\mapsto N$ との組 (V, Φ) を V の元に標識づけられたグラフ、または単に V 上標識グラフと呼ぶ。混乱のない限り、「V 上標識」を省略することがしばしばある。グラフ $G=(V, \Phi)$ について、V の要素を点とよび、含まれる点の個数を G の位数といい、$n(G)$ で表す。また、$\sum_{x\in\binom{V}{2}}\Phi(x)$ を G の大きさといい、$q(G)$ で表す。$n(G)=1$, $q(G)=0$ なるグラフ G は自明なグラフと呼ばれる。グラフ $G=(V, \Phi)$ において、Φ 各 $\{i, j\}\in\binom{V}{2}$ に対し $\Phi(\{i, j\})$ を $\{i, j\}$ における重複度といい、$\Phi(\{i, j\})\geqq 1$ のとき、$\{i, j\}$ を G の辺という。$\{i, j\}$ が G の辺であるとき、点 i は辺 $\{i, j\}$ に接続しているといわれる。i に対し、$\sum_{j\in V(j\neq i)}\Phi(\{i, j\})$ を点 i の次数という。すべての $\{i, j\}\in\binom{V}{2}$ に対し、$\Phi(\{i, j\})\leqq 1$ のとき、(V, Φ) は単純グラフという。

単純グラフ G について、$E=\{\{i,j\}\in\binom{V}{2}\mid\Phi(\{i,j\})=1\}$ と書くと、G は V と E の対 (V, E) と考えてもよい。

2つのグラフ $G_1=(V_1, \Phi_1)$, $G_2=(V_2, \Phi_2)$ について、$V_1=V_2$ かつ $\Phi_1=\Phi_2$ が成り立つとき G_1 と G_2 は同等であるといい、$G_1=G_2$ と書く。ここでは、単純グラフのみを扱う。

単純グラフ $G=(V, E)$ において、$i,j\in V$, $(i\neq j)$ に対し、異なった点の列 $P: i=i_1, i_2, \cdots, i_k=j$ が条件「$\{i_\ell, i_\ell+1\}\in E$, $\ell=1, 2, \cdots, k-1$」を満たすとき、P を G の道という。2点 $i, j\in V$ に対し、i と j の間に道が存在するとき、i と j は G において連結しているという。

G のどの2点も連結しているとき、G は連結グラフといわれる。自明なグラフは連結グラフと定める。G の部分グラフのうち、連結という性質での極大なものを G の（連結）成分という。

本論では、互いに同等でない標識グラフの個数を考察することにする。このアプローチを標識グラフの数え上げと呼ぶ。Riddell[2] は標識グラフの数え上げの考察に1つのたいへん美しいシンプルな方程式を編み出した。ここで、この方程式の適用の広さを観察してみたい。

3　標識グラフの母関数

点集合 $V=\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ 上の標識グラフのうち、大きさ q の標識グラフの個数を考える。$\binom{V}{2}$ には $\binom{n}{2}$ 個の元があるから、$\binom{V}{2}$ から q 個の元を取り出しグラフを構成する。構成されたこのグラフは大きさ q の V 上標識グラフであり、取り出した q 個の組が異なると対応する標識グラフは異なったものになる。したがって、大きさ q の V 上標識グラフは $\binom{\binom{n}{2}}{q}$ 個あることがわかる。$\binom{\binom{n}{2}}{q}$ を x^q の係数とする多項式 $G_n(x)$ は標識グラフの数え上げ通常型母関数といわれ、それは

$$G_n(x)=\sum_{q=0}^{m}\binom{m}{q}x^q=(1+x)^m \qquad (3.1)$$

で書かれる。　そこで $m=\binom{n}{2}$.$G_n(x)$ の $x=1$ における値 $G_n(1)=2^{\binom{n}{2}}$ は位数 n の標識グラフの個数を表している。$G_n(1)$ を $\frac{x^n}{n!}$ の係数とする指数型母関数 $G(x)$ は

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{\binom{n}{2}}\frac{x^n}{n!} \qquad (3.2)$$

であり、$G(x)$ は標識グラフの指数型母関数といわれる。

4　連結な標識グラフ

この節ではいろいろな種類のグラフの数え上げを考察する。この考察にとても大きな力を発揮する補題を用意する。グラフを観察すると、いろいろな性質が見られる。性質 P を考えよう。a_n を性質 P をもつ位数 n のすべてのグラフを n 個の名前の組から標識づける仕方の数を表すものとし、指数型母関数

$$a(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!},$$

を考える。グラフのサイズを考慮に入れる場合は次の指数型母関数が考えられる。

$$a(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(y)\frac{x^n}{n!},$$

ここで、$b_n(y)$ の y^q の係数は性質 P をもつ位数 n、サイズ q の標識グラフの個数（n 個の名前の組から標識づける仕方の数）を表す高々 $\binom{n}{2}$ 次の多項式である。

補題1.

(1)　$a^s(x)$ における $\frac{x^n}{n!}$ の係数は、性質 P をもつ s 個のグラフ $G_1, G_2, \cdots, G_s$ を並べた組 $(G_1, G_2, \cdots, G_s)$ のうちこれらのグラフが互いに共通な点を持たなく、かつ $n(G_1)+n(G_2)+\cdots+n(G_s)=n$ を満たす組を1から n までのラベルで標識づける仕方の数を与える。

(2) $a^s(x,y)$ における $y^q\dfrac{x^n}{n!}$ の係数は性質 P をもつ s 個のグラフ $G_1,G_2,\cdots,G_s$ を並べた組 $(G_1,G_2,\cdots,G_s)$ のうちこれらのグラフが互いに共通な点を持たなく、かつ $n(G_1)+n(G_2)+\cdots+n(G_s)=n$ を満たし、$q(G_1)+q(G_2)+\cdots+q(G_s)=q$ を満たす組を1から n までのラベルで標識づける仕方の数を与える。

補題1における s 個のグラフの組の中に並べる順序を考えないとするならば、$a^s(x)$ あるいは $a^s(x,y)$ を $s!$ で割ればよい。$\sum_{s=1}^{\infty}\dfrac{a^s(x)}{s!}$ がある指数型母関数 $F(x)$ で表され、また $\sum_{s=1}^{\infty}\dfrac{a^s(x,\ y)}{s!}$ がある指数型母関数 $F(x,y)$ で表されるものとする。すなわち

$$F(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{a^s(x)}{s!}$$

$$F(x,y)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{a^s(x,\ y)}{s!}$$

この2つの式はそれぞれ

$$1+F(x)=e^{a(x)} \tag{4.1}$$

$$1+F(x,y)=e^{a(x,y)} \tag{4.2}$$

と書かれる。

Riddell[2] は連結という性質をもった標識グラフの数え上げを行った。$C(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\dfrac{x^n}{n!}$ を連結な標識グラフに対する母関数とする。ここで、C_n は位数 n の連結な標識グラフの個数である。このとき、$\dfrac{C^s(x)}{s!}$ はちょうど s 個の成分をもつ標識グラフに対する指数型母関数である。すなわち、この指数型母関数の $\dfrac{x^n}{n!}$ の係数は s 個の成分をもつ位数 n の標識グラフの個数である。この指数型母関数を $s=1,2,3,\cdots$ にわたっての和は標識グラフの指数型母関数 $G(x)$((3.2) で与えられている) に一致するはずである。(4.1) において、$F(x)$ を $G(x)$、$a(x)$ を $C(x)$ と置き換えて、次の定理が得られる。

定理1. (Riddell[2])

$$1+G(x)=e^{C(x)} \tag{4.3}$$

そこで、(4.3) の形をした式を Riddell 型方程式と呼ぶことにする。(4.3) から直接各 C_n を求めることは困難である。そこで、たいへん有効な道具を述べる。次の補題は Harary and Palmer[1] に見られるものである。

補題2. $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}A_m x^m=e^{\sum_{m=1}^{\infty}a_m x^m}$ ならば、$m\geqq 1$ に対して、

$$a_m=A_m-\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m-1}ka_kA_{m-k}\right)$$

が成り立つ。

補題2において、$A_m=2^{\binom{m}{2}}/m!$ および $a_m=C_m/m!$ とおき、等式 (4.3) に注意して漸化式

$$G_n=2^{\binom{n}{2}}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n}{k}2^{\binom{n-k}{2}}C_k \tag{4.4}$$

を得る。(4.4) を利用して $C(x)$ の初めのいくつかの項を求めると

$$\begin{aligned}C(x)=\ &x+\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^3}{3!}+\frac{38x^4}{4!}+\frac{728x^5}{5!}\\&+\frac{26704x^6}{6!}+\frac{1866256x^7}{7!}+\frac{251548592x^8}{8!}\\&+\frac{66296291072x^9}{9!}+\frac{34496488594816x^{10}}{10!}\\&+\cdots\end{aligned} \tag{4.5}$$

たとえば、$C(x)$ において $\dfrac{x^4}{4!}$ の係数38は位数4の連結な標識グラフが38通りあることを示している。定理1は点の個数をパラメータにして連結標識グラフを数え上げており、そこでサイズもパラメータに含めての連結標識グラフの数え上げを考えてみる。この場合は2変数母関数の考察に通じる。母関数 $C(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(y)\dfrac{x^n}{n!}$ を考える。ここで、$C_n(y)$ の y^q の係数は位数 n、サイズ q の連結な標識グラフの個数を表す高々 $\binom{n}{2}$ 次の多項式である。定理1に先立って考察したように、$\dfrac{C^s(x,\ y)}{s!}$ はちょうど s 個の成分をもつ標識グラフに対する母関数であり、これを $s=1,2,3,\cdots$ にわたって

の和は

$$G(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}G_n(y)\frac{x^n}{n!}$$

に等しい。ここで、$G_n(y)$ は (3.1) で与えられる。(4.2) において $F(x,y)$ を $G(x,y)$ に、$a(x,y)$ を $C(x,y)$ に置き換えることにより、Riddell 型方程式が得られる。

定理2.

$$1+G(x,y)=e^{C(x,y)}$$

補題2を用いて漸化式

$$C_n(x)=G_n(x)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n}{k}C_k(x)G_{n-k}(x)$$

を得る。$C_1(x)=G_1(x)=1$ であるから、

$$\begin{aligned}
C_1(x)&=1\\
C_2(x)&=x\\
C_3(x)&=3x^2+x^3\\
C_4(x)&=16x^3+15x^4+6x^5+x^6\\
C_5(x)&=125x^4+222x^5+205x^6+120x^7\\
&\quad+45x^8+10x^9+x^{10}\\
C_6(x)&=1296x^5+3660x^6+5700x^7+6165x^8\\
&\quad+4945x^9+2997x^{10}+1365x^{11}+455x^{12}\\
&\quad+105x^{13}+15x^{14}+x^{15}\\
C_7(x)&=16807x^6+68295x^7+156555x^8\\
&\quad+258125x^9+331506x^{10}+343140x^{11}\\
&\quad+290745x^{12}+202755x^{13}+116175x^{14}\\
&\quad+54257x^{15}+20349x^{16}+5985x^{17}\\
&\quad+1330x^{18}+210x^{19}+21x^{20}+x^{21}
\end{aligned}$$

が得られる。たとえば、$C_4(x)$ において x^5 の係数6は位数4、サイズ5の連結な標識グラフの個数を示している。また、$C_4(1)=38$ は (4.5) に見られる $C(x)$ の $\frac{x^4}{4!}$ の係数に一致する。

もう少し微細にグラフの分類を考察してみる。点に接続する辺の個数がその点の次数であり、次数が奇数である点を奇点とよぶ。グラフの奇点の個数はつねに偶数であることはよく知られている。次の定理が Tazawa and Shirakura[3] によって与えられた。

定理3.　d 個の奇点をもつ位数 n、サイズ q の標識グラフの個数を x^dy^{d+q} の係数にする母関数は

$$w_n(x,y)=\frac{1}{2^n}(1+y)^{\binom{n}{2}}(1-xy)^n\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}\cdot\left(\frac{1+xy}{1-xy}\right)^{k-1}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{(k-1)(n-k+1)}$$

で与えられる。

d 個の奇点をもつ位数 n、サイズ q の連結な標識グラフの個数を x^dy^{d+q} の係数にする母関数を $C_n(x,y)$ とし、指数型母関数

$$C(x,\ y,\ z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(x,\ y)\frac{z^n}{n!}$$

を考える。[3] において、$C_n(x,y)$ は若干複雑な方法で導かれた。ここでは、Riddell 型方程式に視点をおいて $C_n(x,y)$ を導く簡単な手法があるということを紹介する。定理3に基づき新たに指数型母関数を定義する。すなわち $w_n(x,y)$ を $\frac{z^n}{n!}$ の係数にする指数型母関数

$$w(x,\ y,\ z)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(x,\ y)\frac{z^n}{n!}$$

を考える。$w(x,y,z)$ と $C(x,y,z)$ の関係について、再び Riddell 型方程式が得られる。

定理4.

$$1+w(x,y,z)=e^{C(x,y,z)}$$

再度、補題2を用いて漸化式

$$C_n(x,y)=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n}{k}C_k(x,\ y)w_{n-k}(x,\ y)$$

$C_1(x,y)=w_1(x,y)=1$ であるから、

$$\begin{aligned}
C_2(x,y)&=x^2y^3\\
C_3(x,y)&=3\,x^2y^4+y^3\\
C_4(x,y)&=x^4y^{10}+4x^4y^7+6x^2y^7+12x^2y^6\\
&\quad+12x^2y^5+3y^4\\
C_5(x,y)&=15x^4y^{12}+50x^4y^{11}+60x^4y^{10}\\
&\quad+60x^4y^9+65x^4y^8+10x^2y^{11}+30x^2y^{10}\\
&\quad+60x^2y^9+130x^2y^8+150x^2y^7\\
&\quad+60x^2y^6+y^{10}+10y^7+15y^6+12y^5\\
C_6(x,y)&=x^6y^{21}+20x^6y^{18}+45x^6y^{17}+72x^6y^{16}\\
&\quad+160x^6y^{15}+240x^6y^{14}+180x^6y^{13}\\
&\quad+120x^6y^{12}+96x^6y^{11}+15x^4y^{18}\\
&\quad+60x^4y^{17}+180x^4y^{16}+600x^4y^{15}\\
&\quad+1455x^4y^{14}+2400x^4y^{13}+2910x^4y^{12}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2700x^4y^{11} + 1860x^4y^{10} + 840x^4y^9 \\
&+ 45x^2y^{15} + 240x^2y^{14} + 660x^2y^{13} \\
&+ 1380x^2y^{12} + 2265x^2y^{11} + 2820x^2y^{10} \\
&+ 2640x^2y^9 + 1620x^2y^8 + 360x^2y^7 \\
&+ 15y^{12} + 60y^{11} + 90y^{10} + 120y^9 \\
&+ 195y^8 + 180y^7 + 60y^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_7(x,y) = {} & 105x^6y^{24} + 735x^6y^{23} + 2457x^6y^{22} \\
&+ 5880x^6y^{21} + 12285x^6y^{20} + 22155x^6y^{19} \\
&+ 32305x^6y^{18} + 38304x^6y^{17} + 38115x^6y^{16} \\
&+ 31010x^6y^{15} + 19320x^6y^{14} + 9660x^6y^{13} \\
&+ 3787x^6y^{12} + 105x^4y^{23} + 770x^4y^{22} \\
&+ 3255x^4y^{21} + 11025x^4y^{20} + 29995x^4y^{19} \\
&+ 63840x^4y^{18} + 109935x^4y^{17} \\
&+ 158585x^4y^{16} + 189945x^4y^{15} \\
&+ 183750x^4y^{14} + 142380x^4y^{13} \\
&+ 88410x^4y^{12} + 40635x^4y^{11} + 10500x^4y^{10} \\
&+ 21x^2y^{22} + 105x^2y^{21} + 420x^2y^{20} \\
&+ 1890x^2y^{19} + 6615x^2y^{18} + 17577x^2y^{17} \\
&+ 38115x^2y^{16} + 67410x^2y^{15} + 95445x^2y^{14} \\
&+ 109830x^2y^{13} + 104811x^2y^{12} + 81060x^2y^{11} \\
&+ 46935x^2y^{10} + 17640x^2y^9 + 2520x^2y^8 \\
&+ y^{21} \\
&+ 35y^{18} + 105y^{17} + 252y^{16} + 805y^{15} \\
&+ 1935y^{14} + 3255y^{13} + 4410y^{12} + 5061y^{11} \\
&+ 4830y^{10} + 3675y^9 + 1890y^8 + 360y^7
\end{aligned}
$$

が得られる。たとえば、$C_4(x,y)$ を考えてみよう。$C_4(x,y)$ は

$$
\begin{aligned}
C_4(x,y) = {} & x^4y^{4+6} + 4x^4y^{4+3} + 6x^2y^{2+5} \\
&+ 12x^2y^{2+4} \\
&+ 12x^2y^{2+3} + 3x^0y^{0+4}
\end{aligned}
$$

と書き直される。したがって、位数 4 の連結な標識グラフについて、次の表が示される。

q（サイズ）	d（奇点の個数）		
	0	2	4
3		12	4
4	3	12	
5		6	
6			1

また、$C_4(1,1)=38$ であり、これは (4.5) に見られる $C(x)$ の $\dfrac{x^4}{4!}$ の係数に一致する。

参考文献

[1] F. Harary and E.M. Palmer, Graphical Enumeration, Academic Press, New York and London, 1973.

[2] R.J. Riddell, Contributions to the theory of condensation, Dissertation, Univ. of Michigan, Ann Arbor, 1951.

[3] S. Tazawa and T. Shirakura, Enumeration of labelled graphs in which the number of oddvertices and the size are given, Kobe Journal of Mathematics 10(1993) 71-78.