

多重調和関数を用いた補間および数値積分法

落合芳博*

*近畿大学理工学部第二部機械工学科

Interpolation and Numerical Integration Using Polyharmonic Function

Yoshihiro OCHIAI*

* Department of Electrical and Mechanical Engineering, Kinki University

Abstract. This paper presents an interpolation method and a numerical integration by using the boundary integral equation and the polyharmonic function. In the method using B-spline, points must be assigned in a gridiron layout. In the presented method using polyharmonic function, arbitrary points can be assigned instead of a gridiron layout, therefore it becomes easy to interpolate. This method requires a boundary geometry of the region and arbitrary internal points. The value at arbitrary point and the integral value are calculated after solving the discretized boundary integral equation. In order to investigate the efficiency of this method, several examples are given.

1. はじめに

任意形状の領域上で定義された分布の補間方法および、この補間法を用いた数値積分法を示す。n次元の分布を補間するには、一次元のスプライン関数をn個掛けた関数を一般に使用する。しかし、この方法では任意の境界形状の場合の補間には適しておらず、任意形状の場合には領域を分割する必要がある[4, 10]。一方、ラディアル・スプラインを用いる補間方法もある[3, 5]。ラディアル・スプラインは任意位置にある点を用いることができる。著者はラディアル・スプラインの一種である多重調和関数と積分方程式を用いる補間法を提案している[7, 8]。本論文では、多重調和関数を用いる方法を、一次元、二次元、三次元問題に適用し、さらにこの多重調和関数を用いた方法で補間された分布の数値積分法を示す。本数値積分では、任意境界形状の数値積分が可能であり、グリーンの定理により二次元積分が一次元積分に、三次元積分が二次元積分に近似的に変換される。二次元の場合、境界上の値と領域内部のいくつかの任意点での値から積分値が得られる。なお、本手法は、熱発生を伴う熱伝導解析を境界要素法によって行う方法から生まれたものである[9]。

2. 理論

2.1 多重調和関数による補間

領域積分を含まない多重調和関数を用いた境界積分方程式により補間する方法を示す。つまり、分布を境界形状と内部の任意位置の点や線で表現する。本論文では、関数にラプラスアンを掛けると、滑らかさが減少するが、逆に積分すると滑らかが増すことを活用する。分かりやすくするため、二次元の場合について示す。分布する領域内データの値 $W^S_1(x, y)$ が次のポアソン方程式を近似的に満足しているとする。

$$(2.1) \quad \nabla^2 W^S_1 = -W^S_2 - W^L_2 - W^P_2 - W^D_2$$

ただし、 W^S_2 は面状に分布するものとし、 W^P_2 は面積 A に一樣に分布する W^A_2 が次式によって一点 P に集まったディラックのデルタ関数とする。

$$(2.2) \quad W^P_2 = \lim_{A \rightarrow 0} W^A_2 A$$

この関数 W^P_2 は熱伝導方程式における点熱源に相当する。同様に、 W^L_2 は線状のもの、 W^D_2 は線状でしかもポテンシャル論において二重層となっているものとし、一般に次式が成立するとする。

$$(2.3) \quad \nabla^2 W^S_f = -W^S_{f+1} - W^L_{f+1} - W^P_{f+1} - W^D_{f+1}$$

なお、 W_{f+1} は W_f の曲率和である。また、分布は一般に高次の曲率和を用いなくても表現できるので、 $f=F$ では W^S_{F+1} を含まない次式が成立するとする。

$$(2.4) \quad \nabla^2 W^S_F = -W^L_{F+1} - W^P_{F+1} - W^D_{F+1}$$

連立積分方程式により、分布を表現するための W^P_{F+1} などの強さを求める。

二次元問題のラプラス式の基本解 $T_1(P, Q)$ および、その単位法線 n に関する微分係数は次式で与えられる[2]。

$$(2.5) \quad T_1(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial T_1(P, Q)}{\partial n} = \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}$$

ただし、 r は2点 P および Q 間の距離である。また、次の多重調和関数 T_f を考える。

$$(2.7) \quad \nabla^2 T_f = T_{f-1}$$

点状の W^P_f の数を M 、線状の W^L_f および W^D_f の形状を Γ_L および Γ_D とし、領域 Ω の境界を Γ

とすると、式(2.1)～(2.7)およびグリーンの定理を繰り返し使用することにより次式が得られる[6, 7, 8].

$$(2.8) \quad cW^{s_1}(P) = - \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma} \{T_f(P, Q) \frac{\partial W^{s_f}(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_f(P, Q)}{\partial n} W^{s_f}(Q)\} d\Gamma \\ - \sum_{f=1}^F (-1)^f \sum_{m=1}^M T_f W^{p_{(m)_{f+1}}} - \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_L} T_f W^{L_{f+1}} d\Gamma_L \\ - \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_D} \frac{\partial T_f}{\partial n} W^{D_{f+1}} d\Gamma_D$$

ただし、滑らかな境界上では $c=0.5$ 、領域内部では $c=1$ である。また、式(2.8)の W^{s_f} は同様に次式で与えられる。

$$(2.9) \quad cW^{s_f}(P) = \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} \int_{\Gamma} \{T_{e-f+1}(P, Q) \frac{\partial W^{s_e}(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_{e-f+1}(P, Q)}{\partial n} W^{s_e}(Q)\} d\Gamma \\ + \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} \sum_{m=1}^M T_{e-f+1} W^{p_{(m)_{e+1}}} + \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} \int_{\Gamma_L} T_{e-f+1} W^{L_{e+1}} d\Gamma_L \\ + \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} \int_{\Gamma_D} \frac{\partial T_{e-f+1}}{\partial n} W^{D_{e+1}} d\Gamma_D \quad (f=2, 3, \dots, F)$$

n 次元問題の場合、次式により式(2.8)の f 重調和関数 T_f が求められる。

$$(2.10) \quad T_f = \int \frac{1}{r^{n-1}} \left[\int r^{n-1} T_{f-1} dr \right] dr$$

多重調和関数 T_f および、その法線方向微分係数は一般に次式で与えられる[9].

$$(2.11) \quad T_f = \frac{r^{2(f-1)}}{2\pi [(2f-2)!!]^2} \left[\ln\left(\frac{1}{r}\right) + \operatorname{sgn}(f-1) \sum_{e=1}^{f-1} \frac{1}{e} \right]$$

$$(2.12) \quad \frac{\partial T_f}{\partial n} = \frac{r^{2f-3}}{2\pi [(2f-2)!!]^2} \frac{\partial r}{\partial n} \left[2(f-1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) - 1 + 2(f-1) \sum_{e=1}^{f-1} \frac{1}{e} \right]$$

ただし、 $\operatorname{sgn}()$ は符号関数であり、 $(2f)!! = 2f(2f-2)\cdots 4 \cdot 2$ であり、 $0!! = 1$ である[1].

三次元の場合は、式(2.3)において面状のものも除いた三次元的に分布したものをグリーン定理により面積分に置き換える。三次元の場合の高次基本解 T_f およびその単位法線 n に関する微分係数は次式で与えられる。

$$(2.13) \quad T_f = \frac{r^{2f-3}}{4\pi(2f-2)!}$$

$$(2.14) \quad \frac{\partial T_f}{\partial n} = \frac{(2f-3)r^{2f-4}}{4\pi(2f-2)!} \frac{\partial r}{\partial n}$$

スプライン関数を用いた補間法では、碁盤目状に並んだデータが必要であるが、本手法ではランダムな位置にあるデータを使用することができる。しかし、一次元問題の場合は、スプライン関数を使用する方法と比較して利点はない。また、一次元の場合は境界積分方程式を用いる必要はないが、一次元の場合も同じ形式で表現でき、 f 重調和関数 T_f は一般に次式で与えられる。

$$(2.15) \quad T_f = \frac{-r^{2f-1}}{2(2f-1)!}$$

$$(2.16) \quad \frac{\partial T_f}{\partial n} = \frac{-r^{2f-2}}{2(2f-2)!}$$

CADなどにおいては、補間された分布の微分値が重要な働きをするので、補間された分布の勾配を求める式を示す。式(2.8)を x_i で微分すると、次式が得られる。

$$(2.17) \quad \frac{\partial W^{S_1}(P)}{\partial x_i} = - \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial T_f(P, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial W^{S_f}(Q)}{\partial n} - \frac{\partial^2 T_f(P, Q)}{\partial x_i \partial n} W^{S_f}(Q) \right\} d\Gamma$$

$$- \sum_{f=1}^F (-1)^f \sum_{m=1}^M \frac{\partial T_f}{\partial x_i} W^{P(m)_{f+1}} - \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_L} \frac{\partial T_f}{\partial x_i} W^{L_{f+1}} d\Gamma_L$$

$$- \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_D} \frac{\partial^2 T_f}{\partial x_i \partial n} W^{D_{f+1}} d\Gamma_D$$

ただし、

$$(2.18) \quad \frac{\partial T_f}{\partial x_i} = \frac{r^{2f-3} r_{,i}}{2\pi [(2f-2)!!]^2} \left[2(f-1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) - 1 + 2(f-1) \sum_{e=1}^{f-1} \frac{1}{e} \right]$$

$$(2.19) \quad \frac{\partial^2 T_f}{\partial x_i \partial n} = \frac{r^{2f-4}}{2\pi [(2f-2)!!]^2} \left\{ [n_i + 2(f-2)r_{,i}] \frac{\partial r}{\partial n} \right.$$

$$\left. \times \left[2(f-1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) - 1 + 2(f-1) \sum_{e=1}^{f-1} \frac{1}{e} \right] - 2(f-1)r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right\}$$

上式において、 $r_{,i} = \partial r / \partial x_i$ である。三次元の場合の関数 $\partial T_f / \partial n$ 、 $\partial^2 T_f / \partial x_i \partial n$ は一般に次式で与えられる。

$$(2.20) \quad \frac{\partial T_f}{\partial x_i} = \frac{(2f-3)r_i r^{2f-4}}{4\pi(2f-2)!}$$

$$(2.21) \quad \frac{\partial^2 T_f}{\partial x_i \partial n} = \frac{(2f-3)r^{2f-5}}{4\pi(2f-2)!} \left[n_{ik} + (2f-5)r_i \frac{\partial r}{\partial n} \right]$$

また、一次元の場合は、観測点を x_p 、ソース点を x_0 とすると次式となる。

$$(2.22) \quad \frac{\partial T_f}{\partial x_i} = \frac{-\text{sgn}(x_p - x_0) r^{2f-2}}{2(2f-2)!}$$

$$(2.23) \quad \frac{\partial^2 T_f}{\partial x_i \partial n} = \frac{-\text{sgn}(f-1) \text{sgn}(x_p - x_0) r^{2f-3} f}{(2f-2)!}$$

2.2 数値積分

任意境界形状内で定義された分布量の数値積分方法を示す。分布を式(2.8)～(2.9)で補間した後、数値積分する。グリーンの定理を活用し、領域積分を境界積分に変換するために、新たに関数 $\phi_0=1$ を定義し、次式で与えられる関数 ϕ_f を使用する。

$$(2.24) \quad \nabla^2 \phi_f = \phi_{f-1}$$

二次元の場合、分布 W^s_i が式(2.1)～(2.4)を満足しており、 $W^s_i = W^s_i \phi_0$ を使い、式(2.24)およびグリーンの定理より次式が得られる。

$$(2.25) \quad \int_{\Omega} W^s_i d\Omega = \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma} \left\{ \phi_f(p, Q) \frac{\partial W^s_f(Q)}{\partial n} - \frac{\partial \phi_f(p, Q)}{\partial n} W^s_f(Q) \right\} d\Gamma(Q) \\ + \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_L} \phi_f W^{L_{f+1}} d\Gamma_L + \sum_{f=1}^F (-1)^f \sum_{m=1}^M \phi_f W^{P_{(m)f+1}} \\ + \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_D} \frac{\partial \phi_f}{\partial n} W^{D_{f+1}} d\Gamma_D$$

ただし、 p は領域内の任意点を示し、積分値は点 p の位置によらない。 n 次元問題の場合、式(2.10)と同様に次式により式(2.25)の関数 ϕ_f が求められる。

$$(2.26) \quad \phi_f = \int \frac{1}{r^{n-1}} \left[\int r^{n-1} \phi_{f-1} dr \right] dr$$

二次元の場合、関数 ϕ_f およびその法線方向微分は次式で与えられる。

$$(2.27) \quad \phi_f = \frac{r^{2f}}{[(2f)!!]^2}$$

$$(2.28) \quad \frac{\partial \phi_f}{\partial n} = \frac{r^{2f-1}}{(2f)!!(2f-2)!!} \frac{\partial r}{\partial n}$$

式(2.25)を用いると領域 Ω の面積は次式で表わすことができる。

$$(2.29) \quad \int_{\Omega} d\Omega = \int \frac{\partial \phi_1(p, Q)}{\partial n} d\Gamma$$

式(2.25), (2.29)を用いることにより, 分布量の平均値を算出することが可能である. 式(2.25), (2.29)において点 p は, 領域内の任意の位置の点でよく, どの位置でも同じ値になる. 同様に三次元問題の場合も計算することができ, 関数 ϕ_f およびその法線方向微分係数は次式で与えられる.

$$(2.30) \quad \phi_f = \frac{r^{2f}}{(2f+1)!}$$

$$(2.31) \quad \frac{\partial \phi_f}{\partial n} = \frac{2fr^{2f-1}}{(2f+1)!} \frac{\partial r}{\partial n}$$

三次元問題の場合, 式(2.29)により領域の体積が得られる. 一次元問題の場合も同様に計算することができ, 関数 ϕ_f およびその法線方向微分係数は次式で与えられる.

$$(2.32) \quad \phi_f = \frac{r^{2f}}{(2f)!}$$

$$(2.33) \quad \frac{\partial \phi_f}{\partial n} = \frac{r^{2f-1}}{(2f-1)!}$$

2.3 積分方程式の活用例

実際の計算において, 境界上および, いくつかの内点での W^S_1 は与えられているが, 式(2.8)から(2.9)の W^S_2 から W^S_f および, それらの法線方向の微係数や W^L_f , W^P_f は通常, 与えられていない. そこで次に, これらの値を求める方法を示す. 分かりやすくするために, 二次元問題とし, $F=2$ および W^P_3 を用いる. 式(2.1), (2.4)より

$$(2.34) \quad \nabla^2 W^S_1 = -W^S_2$$

$$(2.35) \quad \nabla^2 W^S_2 = -W^P_3$$

が得られ, 式(2.8), (2.9)より連立積分方程式は次式になる.

$$(2.36) \quad cW^S_1(P) = - \sum_{f=1}^2 (-1)^f \int_{\Gamma} \{T_f(P, Q) \frac{\partial W^S_f(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_f(P, Q)}{\partial n} W^S_f(Q)\} d\Gamma$$

$$(2.37) \quad cW^{s_2}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ T_1(P, Q) \frac{\partial W^{s_2}(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_1(P, Q)}{\partial n} W^{s_2}(Q) \right\} d\Gamma \\ - \sum_{m=1}^M T_2 W^{p(m)}_3 \\ + \sum_{m=1}^M T_1 W^{p(m)}_3$$

式(2.36)および(2.37)を離散化し、境界に対して一定要素を用いることにする。\$W^{s_i}(Q)\$を成分に持つベクトル\$W_i\$、\$\partial W^{s_i}(Q)/\partial n\$を成分に持つベクトルを\$V_i\$、\$W^{p(m)}_3\$を成分に持つベクトルを\$W^p_3\$とし、式(2.36)を離散化すると次式が得られる。

$$(2.38) \quad H_1 W_1 = G_1 V_1 + H_2 W_2 - G_2 V_2 - G^p_2 W^p_3$$

ただし、\$p\$および\$q\$は内点を示すものとする、\$H_1\$、\$G_1\$、\$H_2\$、\$G_2\$および\$G^p_2\$は、点\$i\$で離散化し、\$\Gamma_j\$で線積分を行った場合、次式の成分を持つマトリックスである。

$$(2.39) \quad H_{1ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_1(P, Q)}{\partial n} d\Gamma_j$$

$$(2.40) \quad G_{1ij} = \int_{\Gamma_j} T_1(P, Q) d\Gamma_j$$

$$(2.41) \quad H_{2ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_2(P, Q)}{\partial n} d\Gamma_j$$

$$(2.42) \quad G_{2ij} = \int_{\Gamma_j} T_2(P, Q) d\Gamma_j$$

$$(2.43) \quad G^p_{2ij} = T_2(P, q^p)$$

ただし、上添え字\$P\$は\$W^p_3\$を与える点であることを示す。\$F=2\$の場合を考えているので、\$W^{s_2}(P)\$に関して式(2.37)より次式が得られる。

$$(2.44) \quad H_1 W_2 = G_1 V_2 + G^p_1 W^p_3$$

ただし、\$G^p_1\$は、次式の成分を持つマトリックスである。

$$(2.45) \quad G^p_{1ij} = T_1(P, q^p)$$

また、式(2.36)において、値\$W(p^p)\$の内点を活用すると次式が得られる。

$$(2.46) \quad W(p^p) = -H_3 W_1 + G_3 V_1 + H_4 W_2 - G_4 V_2 - G^p_3 W^p_3$$

ただし, H_3 , G_3 , H_4 , G_4 および G^{P_3} は, 次式の成分を持つマトリックスである.

$$(2.47) \quad H_{3ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_1(p^P, Q)}{\partial n} d\Gamma_j$$

$$(2.48) \quad G_{3ij} = \int_{\Gamma_j} T_1(p^P, Q) d\Gamma_j$$

$$(2.49) \quad H_{4ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_2(p^P, Q)}{\partial n} d\Gamma_j$$

$$(2.50) \quad G_{4ij} = \int_{\Gamma_j} T_2(p^P, Q) d\Gamma_j$$

$$(2.51) \quad G^{P_3}_{ij} = T_2(p^P, q^P)$$

$W_2=0$ と置くと, 式(2.38), (2.44), (2.46)より次式が得られる.

$$(2.52) \quad \begin{bmatrix} G_1 & -G_2 & -G^{P_2} \\ 0 & G_1 & G^{P_1} \\ G_3 & -G_4 & -G^{P_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ W^{P_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 W_1 \\ 0 \\ H_3 W_1 + W(p^P) \end{bmatrix}$$

上式より V_1 , V_2 および W^{P_3} を求めることができる. つまり, 境界上での値 W_1 と内点での値 $W(p^P)$ を与えると, $W^{S_1}(Q)$ および $W^{S_2}(Q)$ の境界上での法線方向の傾きと W^{P_3} の強さが得られる. 任意点の補間値は, 式(2.36)より計算する. 式(2.52)では $W_2=0$ と置いたが, $V_2=0$ と置いてもよい. 一定要素を用い, 境界を N_0 分割し, 内点を N_1 点使用した場合, (FN_0+N_1) 行の連立方程式を解かなければならない. 二次元問題の場合, 連立方程式が大きくない, $F=2$ および W^{P_3} を用いる式(2.52)が実用上便利である.

3. 活用例

外形の形状および内点が与えられた場合の補間例を示す. 図1(a)には顔の外形形状と内点の高さが与えられている. 式(2.52)により補間された形状を図1(b)に示す. 本補間法では与えられた外形形状および内点を必ず通る滑らかな自由曲面が得られる.

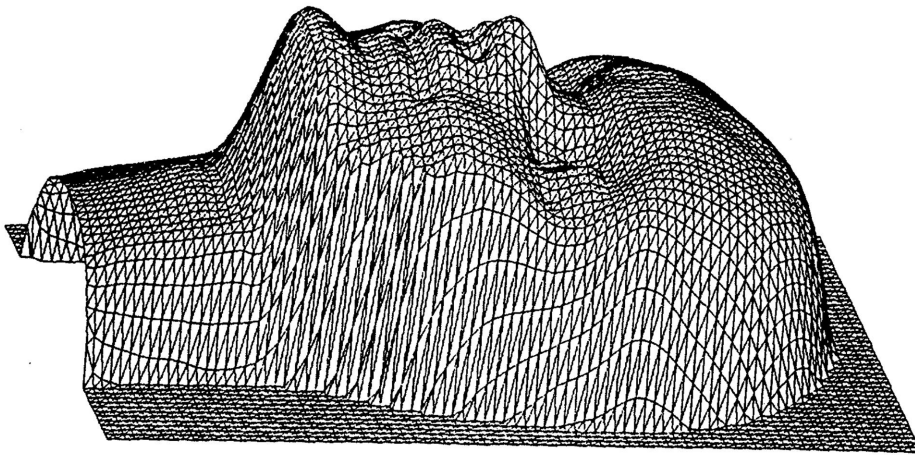
次に, 数値積分の例を示す. 図1の例からも分かるように本数値積分法を用いると任意外形形状の数値積分を行うことができるが, 精度を確かめるために次式の積分を行った.

$$(3.1) \quad V = \int_0^L \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) dx dy$$

図2(a), (b)に, 外形形状および数値積分に使用した内点を示す. $L=10$ の場合, 式(3.1)の

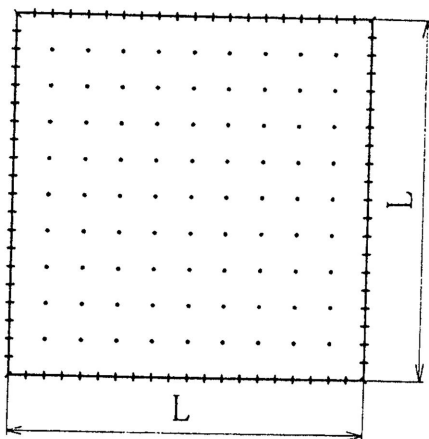


(a) Given data

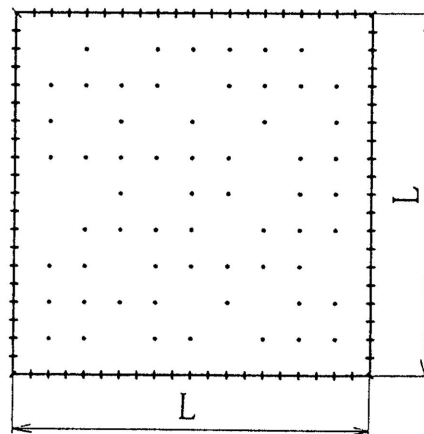


(b) Obtained shape

Fig. 1. Interpolation by integral equation (Human face)



(a) 81 points



(b) 60 points

Fig. 2. Region and internal points

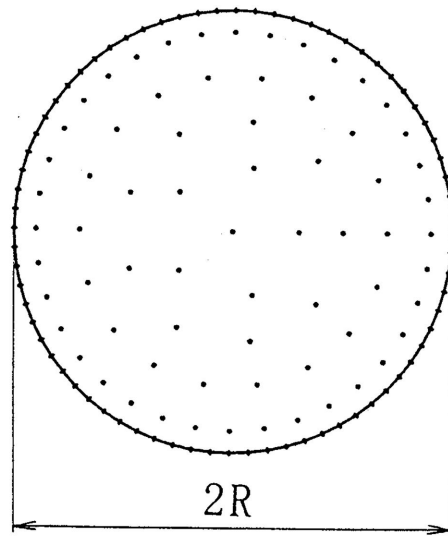
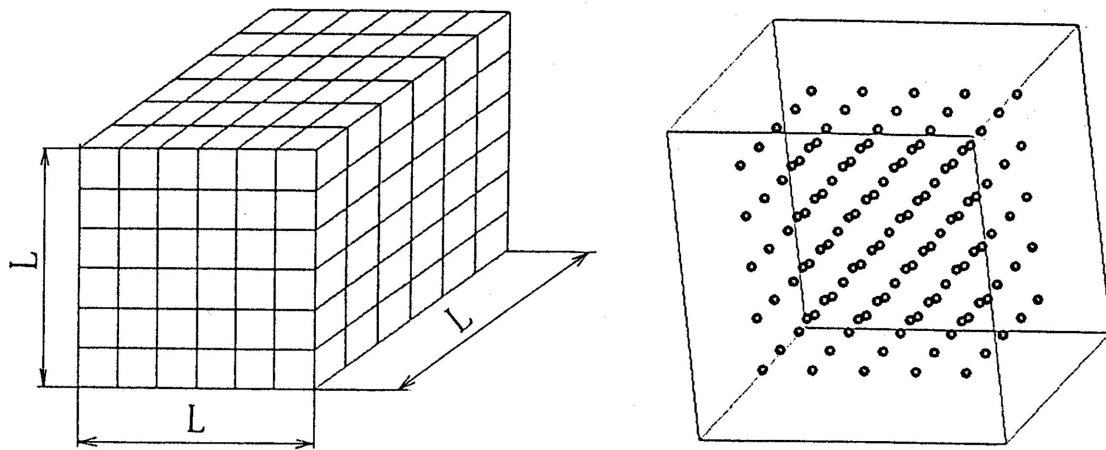


Fig. 3. Volume of half sphere



(a) Boundary discretization (b) Internal points

Fig. 4. Triple integral

厳密な値は40.528であり，本数値積分では図2(a)の場合では40.531であり図2(b)の場合では40.516となった．ただし，境界に一定要素を使用した．

次に，半球の体積を求めた．図3に外形形状および数値積分に使用した内点を示す．半球の半径Rを10とした場合，厳密な値2094.4に対して，本数値積分の値は2092.0であった．

最後に，次式の三重積分の場合の数値積分を行った．

$$(3.2) \quad V = \int_0^L \int_0^L \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) dx dy dz$$

三次元分布を補間するには $F=3$ とし，境界 Γ に関して面積分を使用する．図4(a),(b)に境界の要素分割と使用した内点を示す． $L=10$ とした場合，上式の厳密な値は258.0であり，本

数値積分の値は256.4であった。ただし、境界は一定要素を使用し、領域境界の面積分にはガウス積分を使用した。プログラム作成を容易にするために、一定要素を使用した。数値積分の精度を向上させるには境界に対して高次の要素を使用する必要がある。

4. 結 言

任意外形形状の領域内の分布の補間方法を、多重調和関数および積分方程式を用いて示した。本補間法では任意外形形状の領域内の分布が補間できるので、従来のスプライン関数を用いる場合に比べて活用しやすい。また、同様に本数値積分法は任意外形形状の領域の数値積分が可能である。

参考文献

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, A., Handbook of Mathematical Functions, p. 258, Dover, New York, 1970.
- [2] Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, (1984), 境界要素解析-理論と応用, 田中正隆訳, (1984), pp. 46-70, 丸善.
- [3] Chales A. Micchelli, Interpolation of Scattered Data, Constructive Approximation, Vol. 2, pp. 12-22, 1986.
- [4] 市田浩三, 吉本富士市, スプライン関数とその応用, 教育出版, (1979).
- [5] Nira Dyn, Interpolation of Scattered Data by Radial Functions, in Topics in Multivariate Approximation, Eds. C. K Chui, L. L. Schumaker and F. I. Utreras, pp. 47-61, (1987), Academic Press, London.
- [6] Nowak, A. J., and Neves, A. C., The Multiple Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publication, Southampton, Boston, (1994).
- [7] Ochiai, Y. and Sekiya, T., Generation of Free-Form Surface in CAD for Dies, Advances in Engineering Software, Vol. 22, pp. 113-118, 1995.
- [8] 落合芳博, 境界積分方程式による曲面の創成法, 機械学会論文集, C編, Vol. 60, NO. 570, pp. 709-714, (1994).
- [9] Ochiai, Y. and Sekiya, T., Steady Heat Conduction Analysis by Improved Multiple-Reciprocity Boundary Element Method, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 18, pp. 111-117, (1996).
- [10] 桜井明, Cによるスプライン関数, 東京電機大学出版局, 1993.

468

日本応用数理学会論文誌 Vol. 8, No.4, 1998

落合芳博（正会員）〒577-8502 東大阪市小若江3の4の1 ochiai@me2.kindai.ac.jp
1975年大阪府立大学機械工学科卒業，1977年大阪府立大学工学研究科修士課程修了．工学
博士．大阪府立産業技術総合研究所主任研究員，現在，近畿大学理工学部二部機械工学科
講師

(1997年12月4日受付)

(1997年12月4日受付)