

多重調和関数を用いた軸対称数値積分法

落合芳博*

*近畿大学大学院総合理工学研究科

Axisymmetric Numerical Integration Using Polyharmonic Function

Yoshihiro OCHIAI*

* Graduate School of Science and Technology, Kinki University

Abstract. This paper presents an axisymmetric numerical integration by using the boundary integral equation and the polyharmonic function. In conventional numerical integration, a given region is divided into several standard regions, for which a rule of approximate integration is available. However, it is difficult to decompose a boundary region into elementary standard regions. Presented method does not require decomposition. This method requires a boundary geometry of the region and arbitrary internal points. The integral value is calculated after solving the discretized boundary integral equation. In order to investigate the efficiency of this method, several examples are given.

1. はじめに

任意形状の領域上で定義された関数を数値積分するには、通常、領域を分割して積分を行うか、モンテカルロ法を用いる[3, 9]。任意形状領域を分割するには、困難を伴う場合があり、領域を分割するためのソフトウェアを必要とする。また、モンテカルロ法で精度良い数値積分値を得るには多くの計算が必要である。これらのことを解消する目的で、任意形状の領域上で定義された分布を多重調和関数および境界積分方程式を用いて補間する方法および、この補間法を用いた数値積分法を一次元、二次元および三次元の場合について既に示している[5]。本手法では、任意境界形状の補間や数値積分には適しており、任意形状の場合にも領域を分割する必要がない。本論文では、軸対称問題における数値積分方法を示す。軸対称問題における数値積分は、二次元の数値積分であるが、グリーンの定理により一次元の積分に、次元を減らすことができる。本数値積分では、軸対称多重調和関数を用いて積分される関数を補間し、その補間を用いて数値積分を行う。本数値積分に必要な関数を示し、計算例により本手法の有効性を明らかにする。

2. 理 論

2.1 軸対称多重調和関数による補間

本数値積分では、まず積分される関数を補間する必要がある。はじめに軸対称多重調和関数を用いた境界積分方程式により補間する方法を示す。つまり、関数(分布)を境界形状と内部の任意位置の点や線で表現する。本論文では、関数にラプラシアンを掛けると、滑らかさが減少するが、逆に積分すると滑らかさが増すことを活用する。軸対称問題におけるラプラシアンは次式で定義される。

$$(2.1) \quad \nabla_{[1]}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

分布する領域内データの値 $W^S_1(r, z)$ に式(2.1)のラプラシアンを掛けると、次のポアソン方程式を近似的に満足するものとする[6, 7, 8].

$$(2.2) \quad \nabla_{[1]}^2 W^S_1 = -W^S_2 - W^L_2 - W^P_2$$

ただし、 W^S_2 は r - z 平面に面状に分布するものとし、 W^P_2 は面積 A に一様に分布する W^A_2 が次式によって一点 P に集まったディラックのデルタ関数の強さとする。

$$(2.3) \quad W^P_2 = \lim_{A \rightarrow 0} W^A_2 A$$

この関数 W^P_2 は軸対称熱伝導方程式におけるリング状の熱源に相当する。同様に、 W^L_2 は r - z 平面で線状のものとし、一般に次式が成立するとする。

$$(2.4) \quad \nabla_{[1]}^2 W^S_f = -W^S_{f+1} - W^L_{f+1} - W^P_{f+1}$$

なお、 W_{f+1} は W_f の曲率和のようなものである。また、分布は一般に高次の曲率和を用いなくても表現でき、 $f=F$ では W^S_{F+1} を含まない次式が成立するとする。

$$(2.5) \quad \nabla_{[1]}^2 W^S_F = -W^L_{F+1} - W^P_{F+1}$$

連立積分方程式により、分布を表現するための W^P_{F+1} などの強さを求める。

実際の計算において、 $F=2$ および W^P_3 を用いて補間することができる。つまり、式(2.2), (2.5)より

$$(2.6) \quad \nabla_{[1]}^2 W^S_1 = -W^S_2$$

$$(2.7) \quad \nabla_{[1]}^2 W^S_2 = -W^P_3$$

が得られ、更に式(2.6), (2.7)より次の重調和方程式が得られる。

$$(2.8) \quad \nabla_{[1]}^4 W^S_1 = W^P_3$$

これは、薄板理論における点荷重 W^p_3 が作用する薄板の変位 W^s_1 の式と同じ形式である。つまり、本理論の補間では薄板の変位 W^s_1 が与えられており、逆に未知の点荷重 W^p_3 を求めることに相当する。梁のたわみの式と同等な自然スプラインにおいて、両端のモーメントを0とするように、本理論でも薄板の縁でもモーメントに相当する W^s_2 を0と置くことにより未知数を求める。薄板の場合から分かるように点荷重が作用する点でのモーメント W^s_2 (曲率和)は無限となる。 $f=3$ を用いると、曲率和 W^s_2 は無限にならないが、境界における未知数が増加する。

積分方程式を用いて、未知の W^p_3 などで求めるために、軸対称問題の多重調和関数が必要となる。軸対称問題の多重調和関数は三次元の場合の多重調和関数から得られる。三次元問題の f 重調和関数 $T^{(3)}_f$ は次式で与えられる。

$$(2.9) \quad T^{(3)}_f = \frac{r^{2f-3}}{4\pi(2f-2)!}$$

軸対称問題のラプラスの方程式の基本解 $T^{(1)}_1(P, Q)$ は、三次元問題における基本解 $T^{(3)}_1$ 、 (P, Q) を円周方向に積分することにより求めることができる。

$$(2.10) \quad T^{(1)}_1 = \int_0^{2\pi} T^{(3)}_1 d\theta = \frac{K(m_0)}{C_1 \pi}$$

式(2.10)の点 Q における単位法線 n に関する微分係数は次式で与えられる[2]。

$$(2.11) \quad \frac{\partial T^{(1)}_1}{\partial n} = \frac{1}{C_1 \pi} \left\{ \frac{1}{2r_0} \left[\frac{C_4}{C_2} E(m_0) - K(m_0) \right] n_r + \frac{(z-z_0)}{C_2} E(m_0) n_z \right\}$$

ただし、 $K()$ および $E()$ は第一種および第二種完全楕円積分であり[1]、上式の C_1 および m_0^2 は次式で与えられる。

$$(2.12) \quad C_1 = [(r+r_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}$$

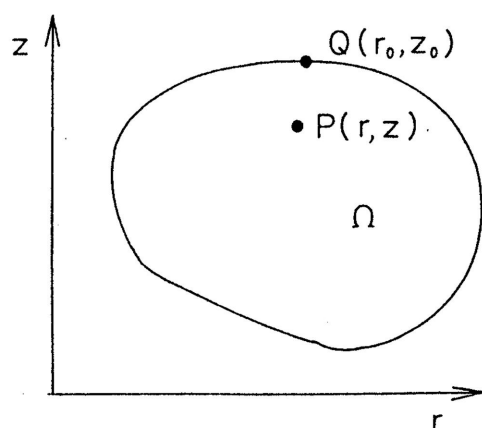


Fig. 1. Notation for axisymmetric problem

$$(2.13) \quad C_2 = (r-r_0)^2 + (z-z_0)^2$$

$$(2.14) \quad C_4 = r^2 - r_0^2 + (z-z_0)^2$$

$$(2.15) \quad m_0^2 = 4rr_0 [(r-r_0)^2 + (z-z_0)^2]^{-1}$$

軸対称重調和関数 $T^{[1]}_2$ とその法線微分は次式で与えられる.

$$(2.16) \quad T^{[1]}_2 = \int_0^{2\pi} T^{[3]}_2 d\theta = \frac{C_1 E(m_0)}{2\pi}$$

$$(2.17) \quad \frac{\partial T^{[1]}_2}{\partial n} = \frac{1}{2\pi C_1} \left\{ \frac{1}{2r_0} C_1^2 E(m_0) - C_4 K(m_0) \right\} n_r - (z-z_0) K(m_0) n_z$$

更に, $T^{[1]}_3$ は次式となる.

$$(2.18) \quad T^{[1]}_3 = \int_0^{2\pi} T^{[3]}_3 d\theta = \frac{C_1^3}{72\pi} [2(2-m_0^2)E(m_0) - (1-m_0^2)K(m_0)]$$

$$(2.19) \quad \frac{\partial T^{[1]}_3}{\partial n} = \frac{C_1}{48\pi} \left\{ \frac{1}{r_0} [C_7 E(m_0) - C_2 K(m_0)] n_r - 6(z-z_0) E(m_0) n_z \right\}$$

ただし,

$$(2.20) \quad C_7 = r^2 + 7r_0^2 + (z-z_0)^2$$

一般に, 軸対称問題の f 重調和関数 $T^{[1]}_f$ は式(2.9)より次式で与えられる.

$$(2.21) \quad T^{[1]}_f = \frac{C_1^{2f-3}}{\pi (2f-2)!} \int_0^{\pi/2} [1-m_0^2 \sin^2 \theta]^{(2f-3)/2} d\theta$$

式(2.21)の積分は次式の関係を用いることにより, 順次求めることができる[4].

$$(2.22) \quad \int_0^{\pi/2} [1-m_0^2 \sin^2 \theta]^{n/2} d\theta \\ = \frac{n-1}{n} (2-m_0^2) \int_0^{\pi/2} [1-m_0^2 \sin^2 \theta]^{(n-2)/2} d\theta \\ - \frac{n-2}{n} (1-m_0^2) \int_0^{\pi/2} [1-m_0^2 \sin^2 \theta]^{(n-4)/2} d\theta$$

また, 多重調和関数 T_f は次式の関係がある.

$$(2.23) \quad \nabla_{[1]}^2 T^{[1]}_f = T^{[1]}_{f-1}$$

点状の W^P_f の数を M ，線状の W^L_f の形状を Γ_L とし，領域 Ω の境界を Γ とすると，式(2.1)～(2.5)およびグリーンの定理を繰り返し使用することにより次式が得られる[2, 6].

$$(2.24) \quad cW^S_f(P) = - \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma} \{T^{[j]}_f(P, Q) \frac{\partial W^S_f(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T^{[j]}_f(P, Q)}{\partial n} W^S_f(Q)\} r_0 d\Gamma(Q) \\ - \sum_{f=1}^F (-1)^f \sum_{m=1}^M T^{[j]}_f W^P_{f+1(m)} r_0 - \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_L} T^{[j]}_f W^L_{f+1} r_0 d\Gamma_L$$

ただし，滑らかな境界上では $c=0.5$ ，領域内部では $c=1$ である．また，式(2.24)の W^S_f は同様に次式で与えられる．

$$(2.25) \quad cW^S_f(P) = \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} \int_{\Gamma} \{T^{[j]}_{e-f+1}(P, Q) \frac{\partial W^S_e(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T^{[j]}_{e-f+1}(P, Q)}{\partial n} W^S_e(Q)\} r_0 d\Gamma(Q) \\ + \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} \sum_{m=1}^M T^{[j]}_{e-f+1} W^P_{e+1(m)} r_0 + \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} \int_{\Gamma_L} T^{[j]}_{e-f+1} W^L_{e+1} r_0 d\Gamma_L$$

スプライン関数を用いた補間法では，碁盤目状に並んだデータが必要であるが，本手法ではランダムな位置にあるデータを使用することができる．

2.2 数値積分

任意境界形状内で定義された分布量の数値積分方法を示す．分布を式(2.2)～(2.5)で補間した後，数値積分する．グリーンの定理を活用し，領域積分を境界積分に変換するための三次元問題の場合の関数 ϕ_f および，その法線方向微分係数は次式で与えられる[5].

$$(2.26) \quad \phi^{[3]}_f = \frac{r^{2f}}{(2f+1)!}$$

$$(2.27) \quad \frac{\partial \phi^{[3]}_f}{\partial n} = \frac{2fr^{2f-1}}{(2f+1)!} \frac{\partial r}{\partial n}$$

軸対称問題の積分に必要な関数 $\phi^{[j]}_f$ は，式(2.26)を円周方向に積分して得られる．

$$(2.28) \quad \phi^{[j]}_f = \frac{4C_1^{2f}}{(2f+1)!} \int_0^{\pi/2} [1-m_0^2 \sin^2 \theta]^f d\theta$$

この関数 $\phi^{[j]}_f$ にも次式の関係が成立する．

$$(2.29) \quad \nabla_{[j]}^2 \phi^{[j]}_f = \phi^{[j]}_{f-1}$$

関数 $\phi^{[j]}_f$ を具体的に示すと、次式のようになる。

$$(2.30) \quad \phi^{[j]}_1 = \frac{\pi C_3}{3}$$

$$(2.31) \quad \frac{\partial \phi^{[j]}_1}{\partial n} = \frac{2\pi [r_0 n_r - (z-z_0) n_z]}{3}$$

$$(2.32) \quad \phi^{[j]}_2 = \frac{\pi [C_3^2 + 2r_0^2 r^2]}{60}$$

$$(2.33) \quad \frac{\partial \phi^{[j]}_2}{\partial n} = \frac{\pi [r_0 C_3 n_r - (z-z_0) C_3 n_z]}{15}$$

$$(2.34) \quad \phi^{[j]}_3 = \frac{\pi C_3 [C_3^2 + 6r_0^2 r^2]}{2520}$$

$$(2.35) \quad \frac{\partial \phi^{[j]}_3}{\partial n} = \frac{\pi [r_0 (C_3^2 + 2C_3 r^2 + 2r_0^2 r^2) n_r - (z-z_0) (C_3^2 + 2r^2 r_0^2) n_z]}{420}$$

ただし

$$(2.35) \quad C_3 = r^2 + r_0^2 + (z-z_0)^2$$

$$(2.36) \quad C_3 = 2r^2 + r_0^2 + (z-z_0)^2$$

分布 W^s_1 が式(2.2)～(2.5)を満足している場合、式(2.29)およびグリーンの定理より次式が得られる[5].

$$(2.37) \quad \int_{\Omega} W^s_1 d\Omega = \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma} \{ \phi^{[j]}_f(p, Q) \frac{\partial W^s_f(Q)}{\partial n} - \frac{\partial \phi^{[j]}_f(p, Q)}{\partial n} W^s_f(Q) \} r_0 d\Gamma(Q) \\ + \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma_L} \phi^{[j]}_f W^L_{f+1} r_0 d\Gamma_L + \sum_{f=1}^F (-1)^f \sum_{m=1}^M \phi^{[j]}_f W^P_{f+1(m)} r_0$$

ただし、 p は任意点を示し、積分値は点 p の位置によらない。式(2.37)において $W^s_1=1$ の場合、軸対称体の体積となり、次式で表わすことができる。

$$(2.38) \quad \int_{\Omega} d\Omega = \int \frac{\partial \phi^{[j]}_1(p, Q)}{\partial n} r_0 d\Gamma(Q)$$

式(2.37)、(2.38)を用いることにより、分布量 W^s_1 の平均値を算出することが可能である。式(2.37)、(2.38)において点 p は、任意の位置の点でよく、どの位置でも同じ値になる。なお、点 p は領域外でもよい。

2.3 積分方程式の活用例

実際の計算において、境界上および、いくつかの内点での W^s_1 は与えられているが、式(2.24)から(2.25)の W^s_2 から W^s_F および、それらの法線方向の微係数や W^L_1 , W^P_1 は通常、与えられていない。そこで、これらの値を求める方法を、 $F=2$ および W^P_3 を用いる場合で示す。つまり、式(2.6), (2.7)を用いる場合、式(2.24), (2.25)の連立積分方程式は次式になる。

$$(2.39) \quad cW^s_1(P) = - \sum_{f=1}^2 (-1)^f \int_{\Gamma} \{T^{[j]}_f(P, Q) \frac{\partial W^s_f(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T^{[j]}_f(P, Q)}{\partial n} W^s_f(Q)\} r_0 d\Gamma(Q) \\ - \sum_{m=1}^M T^{[j]}_2 W^P_{3(m)} r_0$$

$$(2.40) \quad cW^s_2(P) = \int_{\Gamma} \{T^{[j]}_1(P, Q) \frac{\partial W^s_2(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T^{[j]}_1(P, Q)}{\partial n} W^s_2(Q)\} r_0 d\Gamma(Q) \\ + \sum_{m=1}^M T^{[j]}_1 W^P_{3(m)} r_0$$

式(2.39)および(2.40)を離散化し、境界に対して一定要素を用いることにする。 $W^s_f(Q)$ を成分に持つベクトル \mathbf{W}_f , $\partial W^s_f(Q)/\partial n$ を成分に持つベクトルを \mathbf{V}_f , $W^P_{3(m)}$ を成分に持つベクトルを \mathbf{W}^P_3 とし、式(2.39)を離散化すると次式が得られる。

$$(2.41) \quad \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1 = \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_2 \mathbf{W}_2 - \mathbf{G}_2 \mathbf{V}_2 - \mathbf{G}^P_2 \mathbf{W}^P_3$$

ただし、 p および q は内点を示すものとする、 \mathbf{H}_1 , \mathbf{G}_1 , \mathbf{H}_2 , \mathbf{G}_2 および \mathbf{G}^P_2 は、点 i で離散化し、 Γ_j で線積分を行った場合、次式の成分を持つマトリックスである。

$$(2.42) \quad H_{1ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T^{[j]}_1(P_i, Q)}{\partial n} r_0 d\Gamma_j$$

$$(2.43) \quad G_{1ij} = \int_{\Gamma_j} T^{[j]}_1(P_i, Q) r_0 d\Gamma_j$$

$$(2.44) \quad H_{2ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T^{[j]}_2(P_i, Q)}{\partial n} r_0 d\Gamma_j$$

$$(2.45) \quad G_{2ij} = \int_{\Gamma_j} T^{[j]}_2(P_i, Q) r_0 d\Gamma_j$$

$$(2.46) \quad G^P_{2ij} = T^{[j]}_2(P_i, q^P) r_0$$

ただし、上添え字 P は W^P_3 を与える点であることを示す。 $F=2$ の場合を考えているので、 $W^s_2(P)$ に関して式(2.40)より次式が得られる。

$$(2.47) \quad \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_2 = \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_2 + \mathbf{G}^P_1 \mathbf{W}^P_3$$

ただし, \mathbf{G}^P は, 次式の成分を持つマトリックスである.

$$(2.48) \quad G^P_{1ij} = T^{[j]}_1(p_i, q^P) r_o$$

また, 式(2.39)において, 値 $W(p^P)$ の内点を活用すると次式が得られる.

$$(2.49) \quad \mathbf{W}(p^P) = -\mathbf{H}_3 \mathbf{W}_1 + \mathbf{G}_3 \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_4 \mathbf{W}_2 - \mathbf{G}_4 \mathbf{V}_2 - \mathbf{G}^P_3 \mathbf{W}^P_3$$

ただし, \mathbf{H}_3 , \mathbf{G}_3 , \mathbf{H}_4 , \mathbf{G}_4 および \mathbf{G}^P_3 は, 次式の成分を持つマトリックスである.

$$(2.50) \quad H_{3ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T^{[j]}_1(p^P_i, Q)}{\partial n} r_o d\Gamma_j$$

$$(2.51) \quad G_{3ij} = \int_{\Gamma_j} T^{[j]}_1(p^P_i, Q) r_o d\Gamma_j$$

$$(2.52) \quad H_{4ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T^{[j]}_2(p^P_i, Q)}{\partial n} r_o d\Gamma_j$$

$$(2.53) \quad G_{4ij} = \int_{\Gamma_j} T^{[j]}_2(p^P_i, Q) r_o d\Gamma_j$$

$$(2.54) \quad G^P_{3ij} = T^{[j]}_2(p^P_i, q^P) r_o$$

$\mathbf{W}_2 = \mathbf{0}$ と置くと, 式(2.41), (2.47), (2.49) より次式が得られる.

$$(2.55) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}^P_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}^P_1 \\ \mathbf{G}_3 & -\mathbf{G}_4 & -\mathbf{G}^P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{W}^P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_3 \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}(p^P) \end{bmatrix}$$

上式より \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 および \mathbf{W}^P_3 を求めることができる. つまり, 境界上での値 \mathbf{W}_1 と内点での値 $\mathbf{W}(p^P)$ を与えると, $W^{s_1}(Q)$ および $W^{s_2}(Q)$ の境界上での法線方向の傾きと W^P_3 の強さが得られる. 任意点の補間値は, 式(2.39)より計算する. 一定要素を用い, 境界を N_0 分割し, 内点を N_1 点使用した場合, $(FN_0 + N_1)$ 行の連立方程式を解かなければならない. 大きい F を用いると, 連立方程式が大きくなるので, $F=2$ および W^P_3 を用いる式(2.55)が実用上便利である. また, $F=2$ および W^P_3 を用いる場合, 式(2.37)は次式となる.

$$(2.56) \quad \int_{\Omega} W^{s_1} d\Omega = \sum_{f=1}^2 (-1)^f \int_{\Gamma} \left\{ \phi^{[j]}_f(p, Q) \frac{\partial W^{s_f}(Q)}{\partial n} - \frac{\partial \phi^{[j]}_f(p, Q)}{\partial n} W^{s_f}(Q) \right\} r_o d\Gamma(Q)$$

$$+ \sum_{m=1}^M \phi^{(j)}_2(p, q) W^{P_{3(m)}}(q) r_0$$

3. 活用例

本積分法の有効性を示すために円環体の体積 V と二次慣性モーメント J を求める。Fig. 2は円環体の断面図を示す。比重 ρ を1とすると、これらの積分は次式となる。

$$(3.1) \quad V = \int dV = 2\pi \int_S r dS = 2\pi^2 R_1 R_2^2$$

$$(3.2) \quad J = \int r^2 dV = 2\pi \int_S r^3 dS = (R_1^2 + \frac{3}{4} R_2^2)$$

ただし、 S は r - z 平面上の面積である。 $R_1=60$ 、 $R_2=50$ とした場合の体積は、式(3.1)の値は 2.960881×10^6 であり、境界積分を用いた式(2.38)で計算した値は 2.957124×10^6 であった。この場合、式(2.38)から分かるように、計算に内点は不要である。また、 $W^s=r^2$ である二次慣性モーメント J の厳密な値は、式(3.2)より $1.621082523 \times 10^{10}$ であり、式(2.56)の数値積分値は 1.628812×10^{10} であった。ただし、境界に一定要素を使用した。

Fig. 3に示す半径 R の球の体積 V と二次慣性モーメント J を求める。ただし、比重 ρ は1とする。球の厳密な二次慣性モーメント J は次式で与えられる。

$$(3.3) \quad J = \int r^2 dV = 2\pi \int_S r^3 dS = \frac{8}{15} \pi R^5$$

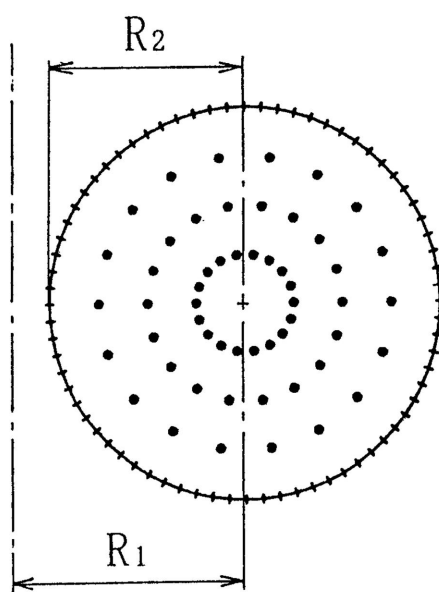


Fig. 2. Boundary discretization and internal points of torus.

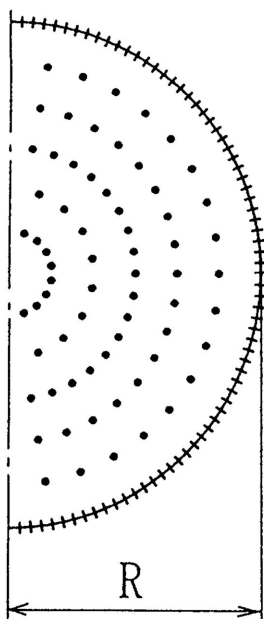


Fig. 3. Boundary discretization and internal points of sphere

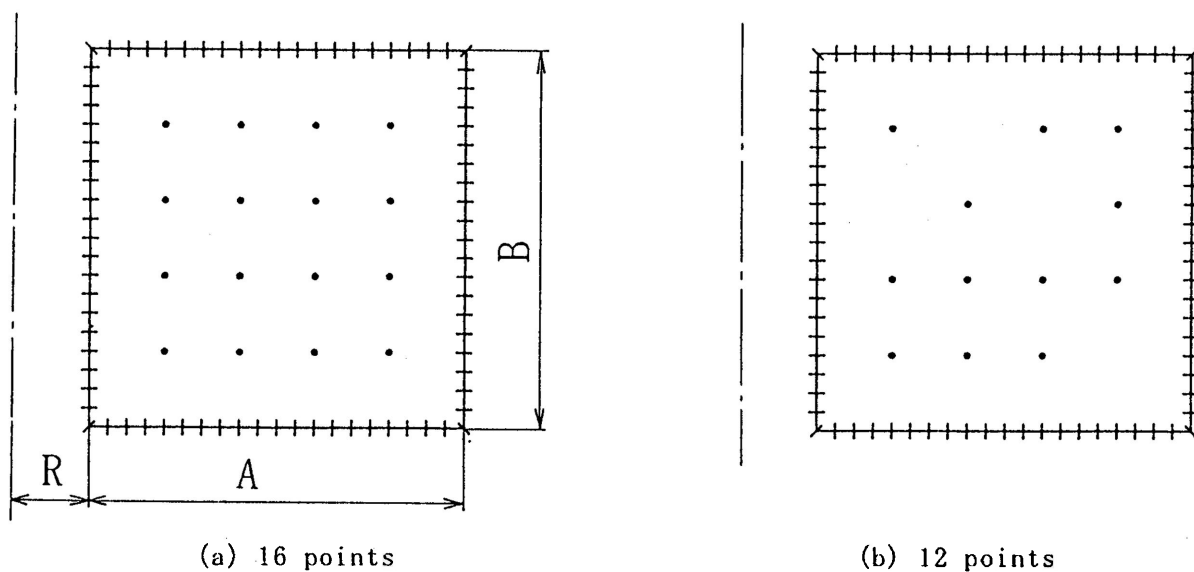


Fig. 4. Boundary discretization and internal points of cylinder

半径 $R=50$ とした場合の球の厳密な体積は 5.23598×10^5 であり、境界積分を用いて計算した値は 5.2335×10^5 であった。また、二次慣性モーメント J の厳密な値は、式(3.3)より 5.2598×10^8 であり、式(2.56)の数値積分値は 5.2814×10^8 であった。

最後に、次の定積分を計算した。

$$(3.4) \quad V=2\pi \int_R^{A+R} \int_0^B \sin\left[\frac{\pi(r-R)}{A}\right] \sin\left(\frac{\pi z}{B}\right) r dr dz$$

Fig. 4(a), (b)に境界の要素分割と使用した内点を示す. $R=10$, $A=B=50$ とした場合, 上式の厳密な値は 2.22816×10^5 である. 式(2.56)の数値積分の値は, Fig. 4(a)の場合 2.227573×10^5 であり, Fig. 4(b)の場合 2.216041×10^5 であった. ただし, 境界は一定要素を使用し, 領域境界の線積分にはガウス積分を使用した. プログラム作成を容易にするために, 一定要素を使用した, 数値積分の精度を向上させるには境界に対して高次の要素を使用する必要がある.

4. 結 言

任意形状の軸対称数値積分法を, 軸対称多重調和関数および積分方程式を用いて補間した後, これらの補間値を用いて数値積分する方法を示した. 本手法では積分の次数が1つ下がり, 一次元の数値積分に変換することができることが示された. また, 積分領域を分割する必要がなく, 実用上の利点が示された. 本数値積分に必要な関数の誘導方法と数値計算に実用上必要な関数を具体的に示した. 計算例により工業的に使用できる精度が得られることが明らかにされた.

参考文献

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, A., Handbook of Mathematical Functions, pp. 590-592, Dover, New York, 1970.
- [2] Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, (1984), 境界要素解析-理論と応用, 田中正隆訳, (1984), pp. 96-100, 丸善.
- [3] Davis, P. J. and Rabinowitz, P., Methods of Numerical Integration, Academic Press, pp. 344-417, London, 1984.
- [4] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., 大槻義彦訳, 数学大公式集, p. 158, (1983), 丸善.
- [5] 落合芳博, 多重調和関数を用いた補間および数値積分法, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 8, No. 4, pp. 457-468, (1998).
- [6] Ochiai, Y. and Sekiya, T., Generation of Free-Form Surface in CAD for Dies, Advances in Engineering Software, Vol. 22, pp. 113-118, 1995.
- [7] 落合芳博, 境界積分方程式による曲面の創成法, 機械学会論文集, C編, Vol. 60, NO. 570, pp. 709-714, (1994).
- [8] Ochiai, Y. and Sekiya, T., Steady Heat Conduction Analysis by Improved Multiple-Reciprocity Boundary Element Method, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 18, pp. 111-117, (1996).

[9] 森正武, 室田一雄, 杉原正顕, 数値計算の基礎, pp. 65-80, (1992), 岩波.

落合芳博 (正会員) 〒577-8502 東大阪市小若江3の4の1 ochiai@me2.kindai.ac.jp
1975年大阪府立大学機械工学科卒業, 1977年大阪府立大学工学研究科修士課程修了. 工学
博士. 大阪府立産業技術総合研究所主任研究員, 現在, 近畿大学総合理工学研究科助教授

(1999年7月6日受付)

(2000年3月30日最終稿受付)