

準理想的重点サンプリング法に基づく構造破損確率の評価法 —更新プロセスによる準理想的重点サンプリング周辺密度関数の決定法—

奥田昇也

Estimation of Structural Failure Probability Based on a Quasi Ideal Importance Sampling Method

- Construction of a Quasi Ideal Importance Sampling Marginal Density Function by a Repetitive Simulation -

Shoya OKUDA

This paper is concerned with the estimation of structural failure probability based on a quasi ideal importance sampling combined with repetitive simulation procedure. A quasi ideal importance sampling joint probability density function combined in the conditional expectation is composed on the basis of the ideal importance sampling concept and the respective marginal *p.d.f.s* are constructed numerically by using small samples. The respective marginal *p.d.f.s* are renewed in every repetitive simulation procedure until they converge to a certain quasi ideal sampling distribution and by using the resultant marginal *p.d.f.s* the quasi ideal importance sampling simulation are executed to estimate the failure probability of structures with multiple failure modes. Numerical example shows that the proposed method gives accurate estimations with shorter processing time.

Key words: Simulation-based reliability estimation, Variance reduction, Importance sampling, Conditional expectation

1. 緒言

本研究は、理想的重点サンプリング法の原理に基づいて、重点サンプリング法を結合した条件付期待値シミュレーションによる構造破損確率推定法を提案する。まず、理想的重点サンプリング密度関数の各サンプリング変数に対する周辺確率密度関数を定式化し、これらを区分積分とシミュレーションによって近似的に準理想的重点サンプリング周辺確率密度として構築する。次に、構築された周辺確率密度に従うサンプルを用いた条件付期待値重点サンプリングシミュレーションを繰り返すことにより、サンプリング変数の周辺確率密度が逐次理想的重点サンプリング周辺確率密度に近づくように更新する。最終的に構築された準理想的重点サンプリング周辺確率密度を用いた条件付期待値重点サンプリングシミュレーションにより、少ないサンプル数で効率的に構造破損確率を推定できることを示す。

2. 重点サンプリング法を結合した条件付期待値シミュレーション

2.1 理想的重点サンプリング法の原理

基本確率変数 $U=(U_1, U_2, \dots, U_k)^T$ は、互いに独立で、時間に依存しない標準正規確率変数とし、基本確率変数の

任意の l 番目の確率変数 U_l を制御変数、制御変数を除く $k-1$ 個の変数からなる U_S をサンプリング変数ベクトル、その確率密度関数を $f_{U_S}(U_S)$ とすると、構造破損確率は、条件付破損確率 $P_{fC}(u_l|u_S)$ を用いて、次のように表される^{1,2)}。

$$P_f = \int_{all u_S} P_{fC}(u_l|u_S) f_{U_S}(u_S) du_S \quad (1)$$

サンプリング変数の重点サンプリング確率密度関数 $h_{U_S}(u_S)$ を用いてサンプリングを行う場合を考えると、式(1)は、次のように書き換えられる。

$$P_f = \int_{all u_S} P_{fC}(u_l|u_S) \frac{f_{U_S}(u_S)}{h_{U_S}(u_S)} h_{U_S}(u_S) du_S \\ = E_{h_{U_S}} \left[P_{fC}(u_l|u_S) \frac{f_{U_S}(u_S)}{h_{U_S}(u_S)} \right] \quad (2)$$

式(2)の重点サンプリング確率密度関数 $h_{U_S}(u_S)$ が、次式のよう
に与えられるならば、

$$h_{U_S}(u_S) = P_{fC}(u_l|u_S) \frac{f_{U_S}(u_S)}{P_f}, \quad \int_{all u_S} h_{U_S}(u_S) du_S = 1 \quad (3)$$

このサンプリング確率密度関数は、式(2)によって、常に P_f を与えるため、理想的重点サンプリング確率密度関数となる^{1,2)}。しかし、式(3)には、求めるべき未知の P_f を含むため、これを構成することは不可能である。そこで本研

究では、式(3)から理想的重点サンプリング確率密度関数が、条件付破損確率 $P_{fC}(u_i|u_S)$ にサンプリング変数の確率密度関数 $f_{U_S}(U_S)$ の積に比例定数 $1/P_f$ を乗じたものである点に着目し、各サンプリング変数に対する近似的な準理想重点サンプリング周辺確率密度関数を、条件付期待値に基づくシミュレーションと区分積分によって、数値的に決定することを考える。

2.2 理想的重点サンプリング確率密度関数の周辺確率密度関数

説明を簡単にするために、基本確率変数が 4 変数 U_1, U_2, U_3, U_4 の場合について示す。制御変数を U_4 とすると、式(3)に対応する理想的重点サンプリング密度関数 $h_I(\cdot)$ は、次式で表される。

$$h_I(u_1, u_2, u_3) = P_{fC}\{u_4 | (u_1, u_2, u_3)\} f_{U_S}(u_1, u_2, u_3) / P_f \quad (4)$$

基本確率変数は互いに独立であるので、次式が成り立つ。

$$f_{U_S}(u_1, u_2, u_3) = f_{U_1}(u_1) \cdot f_{U_2}(u_2) \cdot f_{U_3}(u_3) \quad (5)$$

変数 u_1 に関する理想的重点サンプリング確率密度関数の周辺確率密度関数 $h_{I1}(u_1)$ は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} h_{I1}(u_1) &= \iint_{all\ u_2, all\ u_3} h_I(u_1, u_2, u_3) du_2 du_3 \\ &= \iint_{all\ u_2, all\ u_3} P_{fC}\{u_4 | (u_1, u_2, u_3)\} \frac{f_{U_1}(u_1) f_{U_2}(u_2) f_{U_3}(u_3)}{P_f} du_2 du_3 \\ &= E_{f_{U_2} f_{U_3}} [P_{fC}\{u_4 | u_1, u_2, u_3\}] \frac{f_{U_1}(u_1)}{P_f} = \frac{A_{Q1}(u_1)}{P_f} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $E_{f_{U_2} f_{U_3}}[\cdot]$ は (\cdot) の $f_{U_2}(u_2)$, $f_{U_3}(u_3)$ に関する期待値を表す。

式(6)において、分子の条件付破損確率の期待値に u_1 の確率密度関数の積を $A_{Q1}(u_1)$ とおいている。これより、 $h_{I1}(u_1)$ は、比例定数を $1/P_f$ として $A_{Q1}(u_1)$ に比例する。変数 u_2 , u_3 の周辺確率密度関数 $h_{I2}(u_2)$, $h_{I3}(u_3)$ および $A_{Q2}(u_2)$, $A_{Q3}(u_3)$ もそれぞれ同様にして、決定される。

A_{Q1} を u_1 で積分すると、次式のとおり構造破損確率 P_f となる。

$$\begin{aligned} &\int_{all\ u_1} A_{Q1}(u_1) du_1 \\ &= \iiint_{all\ u_1, all\ u_2, all\ u_3} P_{fC}\{u_4 | (u_1, u_2, u_3)\} f_{U_1}(u_1) f_{U_2}(u_2) f_{U_3}(u_3) du_1 du_2 du_3 \\ &= E_{f_{U_1} f_{U_2} f_{U_3}} [P_{fC}\{u_4 | (u_1, u_2, u_3)\}] = P_f \end{aligned} \quad (7)$$

このように積分によって構造破損確率が求めらるに着目して、 $A_{Q1}(u_1)$, $A_{Q2}(u_2)$, $A_{Q3}(u_3)$ を破損確率よぶ。

2.3 準理想重点サンプリング周辺確率密度関数の

各変数の破損確率要素から構造破損確率が算出ことにより、例えば、 u_1 変数の 1 変数だけの数値

よって、構造破損確率を評価することが出来る。そこで、変数 u_1 の指定された区間 $[u_a, u_b]$ を分割数 n で分割し、区分積分により、破損確率の近似値 P_{fA1} を次式のように算定する。

$$P_{fA1} \cong \sum_{p1=1}^n A_{Q1}(u_1^{(p1)}) \Delta u \quad (8)$$

ここで、 Δu は分割幅である。

u_1 に関する準理想重点サンプリング周辺確率密度関数を $h_{Q1}(u_1)$ とすると、式(8)の結果を利用して、区分積分の区間 $[u_a, u_b]$ の点 $u_1 = u_1^{(p1)}$, $(p1=1, 2, \dots, n)$ における周辺確率密度は、次式のように決定される。

$$h_{Q1}(u_1^{(p1)}) = \frac{A_{Q1}(u_1^{(p1)})}{P_{fA1}} = \frac{A_{Q1}(u_1^{(p1)})}{\sum_{p1=1}^n A_{Q1}(u_1^{(p1)}) \Delta u} \quad (9)$$

$A_{Q2}(u_2)$, $A_{Q3}(u_3)$ に関する区分積分により P_{fA2} , P_{fA3} を算定することが出来るので、変数 u_2 , u_3 に関する準理想重点サンプリング周辺確率密度についても、同様に決定される。ただし、 P_{fA1} , P_{fA2} , P_{fA3} は、理論上は同じ構造破損確率 P_f に等しいが、数値計算上の誤差によって、それぞれ算定値に差異が生じる。そこで各変数の指定された区間上の点 $u_2 = u_2^{(p2)}$, $(p2=1, 2, \dots, n)$, $u_3 = u_3^{(p3)}$, $(p3=1, 2, \dots, n)$ における各周辺確率密度 $h_{Q2}(u_2^{(p2)})$, $h_{Q3}(u_3^{(p3)})$ を決定する場合は、それぞれ P_{fA2} , P_{fA3} で基準化している。

2.4 繰返しシミュレーションによる破損確率要素の更新

式(8), (9)の $A_{Q1}(u_1^{(p1)})$, $(p1=1, 2, \dots, n)$ 中の条件付破損確率を少ないサンプル数のシミュレーションにより推定し、得られた各変数の準理想重点サンプリング周辺確率密度の結果を用いてシミュレーションを繰り返して、そのたびに、式(9)を理想的重点サンプリング周辺密度に近づけるように更新する。

まず、 u_1 変数の指定された区分積分区間 $[u_a, u_b]$ の点 $u_1 = u_1^{(p1)}$, $(p1=1, 2, \dots, n)$ における $A_{Q1}(u_1^{(p1)})$ のシミュレーションによる推定量は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} A_{Q1}(u_1^{(p1)}) &= E_{f_{U_2} f_{U_3}} [P_{fC}\{u_4 | u_1^{(p1)}, u_2, u_3\}] f_{U_1}(u_1^{(p1)}) \\ &\cong \frac{1}{N_Q} \sum_{i=1}^{N_Q} [P_{fC}\{u_4 | (u_1^{(p1)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)})\}] f_{U_1}(u_1^{(p1)}) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 N_Q はシミュレーションのサンプル数、 $u_2^{(i)}$, $u_3^{(i)}$ は、 $f_{U_2}(u_2)$, $f_{U_3}(u_3)$ に従うサンプルである。式(10)は、繰返しシミュレーションの最初の処理過程を示している。繰返しシミュレーションの第 2 回目の過程では、サンプル生成密度関数として $f_{U_2}(u_2)$, $f_{U_3}(u_3)$ を用いるのではなく、式(10)で得られた準理想的重点サンプリング周辺確率密度関数 $h_{Q2}(u_2)$, $h_{Q3}(u_3)$ からサンプリングする。以後、繰返しシミュレーションでは、逐次求められた各サンプリング変数の準理想重点サンプリング周辺確率密度を用いる。

すなわち、点 $u_1=u_1^{(p_1)}$, ($p_1=1, 2, \dots, n$) における $A_{Q_1}(u_1^{(p_1)})$ の推定量は、次式で与えられる.

$$A_{Q_1}(u_1^{(p_1)}) = E_{h_{Q_2}h_{Q_3}} \left[P_{fc}(u_4 | u_1^{(p_1)}, u_2, u_3) \frac{f_{U_2}(u_2)f_{U_3}(u_3)}{h_{Q_2}(u_2)h_{Q_3}(u_3)} \right] f_{U_1}(u_1^{(p_1)}) \quad (11)$$

この結果を式(9)に適用して、周辺確率密度を更新する. 変数 u_2, u_3 に関する周辺確率密度についても、同様に決定し、それぞれの分布のヒストグラムから累積ヒストグラムを決定し、これに基づいてサンプル生成を行う. 準理想的重点サンプリング周辺確率密度のヒストグラム $h_{Q_2}(u_2), h_{Q_3}(u_3)$ に従うサンプル数が少ない場合、理想的な重点サンプリング周辺確率密度のヒストグラムが得られない. そこで、少ないサンプル数のシミュレーションを N_R 回繰り返すことによって破損確率要素 $A_{Q_1}(u_1)$ を更新し、同時に $h_{Q_2}(u_2), h_{Q_3}(u_3)$ を理想的重点サンプリング周辺確率密度に近づけるのである. ここまでの過程で必要な総サンプル数は、 $(k-1) \times N_Q \times n \times N_R$ となる. N_R 回繰り返した後、式(2)により構造破損確率の推定量を N 個のサンプル数による重点サンプリングシミュレーションで求める.

3. 数値計算例

モンテカルロ法を M.C.S., 提案手法を R.Q.I.C.E. と略記する. 表より CPU は周辺確率密度の更新プロセス時間と重点サンプリングシミュレーション時間の和を表し, c.o.v. は変動係数である.

図 1 に示すように 25 変数を有するトラス構造に関する構造破損確率の算出を行う. 基本確率変数の統計データを表 1 に、限界状態関数を表 2 に示す.

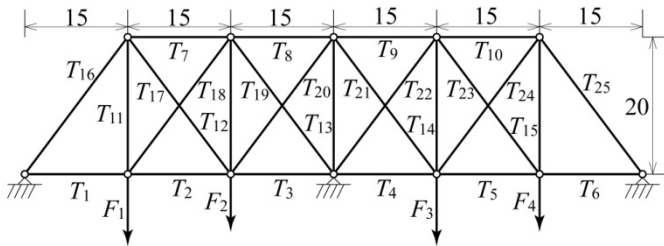


Figure 1. A 25-member truss structure

図2は、本研究で行った更新プロセスにより重点サンプリング周辺密度関数が理想的な関数に更新されていく状態を示す. 更新回数である N_R が増加に従い周辺密度関数の形状が変化している様子が見られる.

Table 1. Statistical data of basic random variables for Case 2

Variable	Mean value	standard deviation
$T_1, T_2, \dots, T_9, T_{10}$	15.0	2.25
T_{11}, T_{15}	36.0	5.40
T_{12}, T_{14}	18.0	2.70
$T_{13}, T_{17}, T_{19}, T_{22}, T_{24}$	10.5	1.58
T_{16}, T_{25}	42.0	6.30
T_{18}, T_{23}	7.50	1.13
T_{20}, T_{21}	15.0	2.25
F_1, F_3	10.5	
	2.63	
F_2, F_4	8.40	
	2.10	

Table 2. List of the limit state functions.

Mode no.	Limit state function
1	$T_1 + 0.375 T_{13} + 0.3 T_{20} + 0.3 T_{21} - 0.625 F_1 - 0.5 F_2 - 0.25 F_3 - 0.125 F_4$
2	$T_6 + 0.375 T_{13} + 0.3 T_{20} + 0.3 T_{21} - 0.125 F_1 - 0.25 F_2 - 0.5 F_3 - 0.625 F_4$
3	$T_5 + T_{10} + 1.125 T_{13} + 0.9 T_{20} + 0.9 T_{21} - 0.375 F_1 - 0.75 F_2 - 1.5 F_3 - 1.125 F_4$
4	$T_5 + T_{10} + 1.8 T_{21} + 1.8 T_{22} - 2.25 F_3 - 1.5 F_4$
5	$T_2 + T_7 + 1.125 T_{13} + 0.9 T_{20} + 0.9 T_{21} - 1.125 F_1 - 1.5 F_2 - 0.75 F_3 - 0.375 F_4$
6	$T_1 + 0.6 T_{19} + 0.6 T_{20} - 0.75 F_1 - 0.75 F_2$
7	$T_6 + 0.6 T_{21} + 0.6 T_{22} - 0.75 F_3 - 0.75 F_4$
8	$T_1 + 0.6 T_{21} + 0.6 T_{22} - 0.5 F_1 - 0.25 F_2 - 0.5 F_3 - 0.25 F_4$
9	$T_2 + T_7 + 1.8 T_{19} + 1.8 T_{20} - 1.5 F_1 - 2.25 F_2$
10	$T_{10} + 0.75 T_{13} + 0.75 T_{14} + 0.6 T_{20} - 0.25 F_1 - 0.5 F_2 - F_3 - 0.5 F_4$
11	$T_4 + 1.2 T_{21} + 1.8 T_{22} - 1.5 F_3 - 0.75 F_4$
12	$T_7 + 0.75 T_{12} + 0.75 T_{13} + 0.6 T_{21} - 0.5 F_1 - F_2 - 0.5 F_3 - 0.25 F_4$

表 3 は N_Q を一定にして N_R を変えた場合の破損確率の推定量への影響を示す. 理論的には N_R をより大きくすれば、理想的な周辺密度関数が構成されるが、この周辺密度関数の構成に膨大な時間に要することになり、総時間を考えれば、 N_R は 100 回程度で充分と考えられる.

表 4 は、更新回数が破損確率の推定量に及ぼす影響を示す. この表より更新プロセスが効果的であることがわかる.

4. 結言

提案手法は繰返しシミュレーション過程を用いることにより、少ない計算時間で精度の良い破損確率の推定量を算出できることが判った。

1. 奥田昇也, 米澤政昭: 関西支部第 82 期定時総会講演会講演論文集, No. 074-1, pp.5-19, (2007)
2. Masaaki Yonezawa, Shoya Okuda and Hiroaki Kobayashi: Structural Engineering and Mechanics, **32**, 1, pp.55-69, (2009)

参考文献

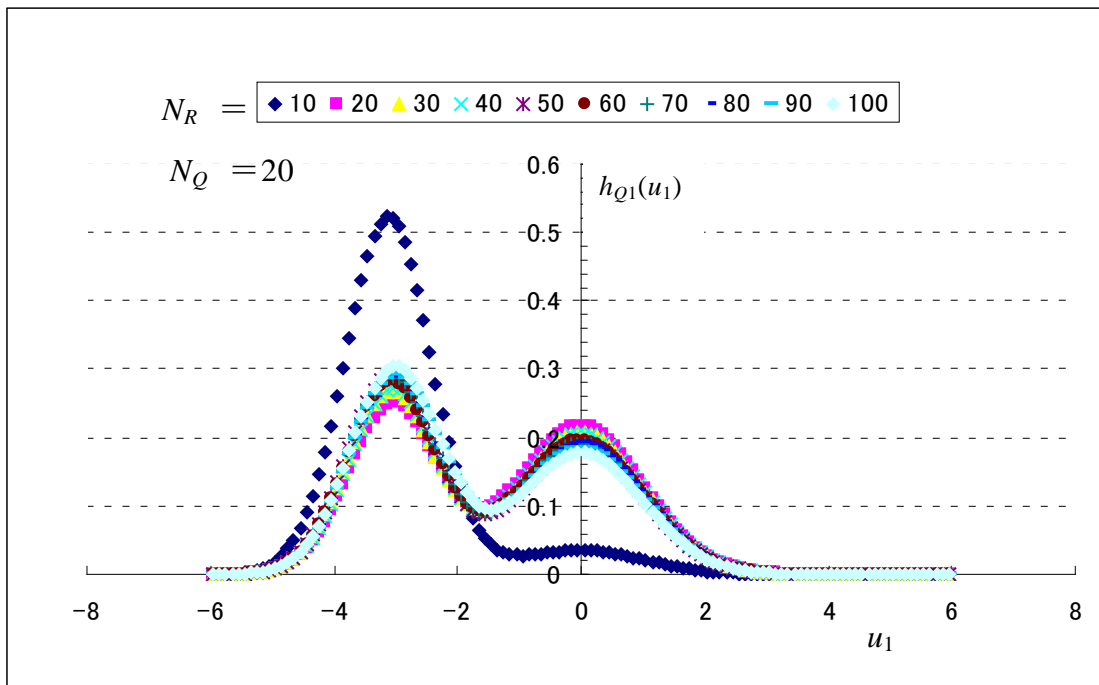


Fig. 2 The effect of N_R on the shape of the resulting quasi ideal importance sampling marginal *p.d.f.* of u_1

Table2 Comparison of the Estimations of P_f

Method		N	$P_f \times 10^{-5}$	C.O.V.	CPU (s)	
M.C.S.		235,679,431	4.24	0.01	1059	
R.Q.I. C.E	$N_Q=20$	$N_R=50$	1,031,304	4.33	0.01	43
		$N_R=100$	545,357	4.24	0.01	27
		$N_R=500$	319,825	4.22	0.01	43
		$N_R=2000$	331,509	4.22	0.01	99

Note: $\Delta u = 0.1$, $[u_a, u_b] = [-6.0 \sim 6.0]$, $n=120$

Table3 Comparison of the Estimations of P_f with a Repetitive Simulation

Method			N	$P_f \times 10^{-5}$	C.O.V.	CPU (s)
R.Q.I.	$N_Q=10$	$N_R=20$	5×10^6	4.33	0.02	185
C.E	$N_Q=1$	$N_R=200$	5×10^6	4.24	0.07	185

Note: $\Delta u = 0.1$, $[u_a, u_b] = [-6.0 \sim 6.0]$, $n=120$