

体分布多重調和関数を用いた補間および多次元数値積分法

落合芳博 *

*近畿大学大学院総合理工研究科

Interpolation and Multiple Numerical Integration Using Polyharmonic
Function of Volume Distribution

Yoshihiro OCHIAI*

* Department of Mechanical Engineering, Kinki University

Abstract. This paper presents an interpolation method and a numerical multiple integration using the boundary integral equations and a polyharmonic function of volume distribution. In the method using B-spline, points must be assigned in a gridiron layout. In the presented method using the polyharmonic function of volume distribution, arbitrary points can be assigned instead of using a gridiron layout, therefore it becomes easy to interpolate. This method requires a boundary geometry of the region and arbitrary internal points. The values at arbitrary point and the integral value are calculated after solving the discretized boundary integral equations. In order to investigate the efficiency of this method, several examples are given. Especially, a use of the poly-harmonic function of volume distribution is effective for the three-dimensional case. The advantages of using the poly-harmonic function of volume distribution are the decrease of CPU time and the stability of the interpolation.

1. はじめに

多重調和関数を用いた任意形状の領域で定義された分布の補間方法, およびこの補間法を用いた数値積分法を提案した[6, 7]. その数値積分法では, グリーンの定理により二次元積分が一次元積分に, 三次元積分が二次元積分に近似的に変換され, 境界上の関数値と領域内部のいくつかの点(任意)での関数値から積分の近似値が得られる. 従来の数値積分法では, 積分点を基盤目状に与える必要があり, 一般の領域の場合には, 領域を分割する必要がある[2]が, この数値積分は任意形状の領域の場合に容易に適用できる. しかし, 提案手法にも欠点があり, 三次元の場合, 滑らかな補間を得るために高次の多重調和関数を用いる必要があるが, そのために算法が不安定になり, 適切な解が得られない場合がある. 一方, [9]において, 二次元の場合, 多重調和関数の代わりに体分布多重調和関数(面分布多重調和関数)を用いると補間が滑らかになることを既に示した. そこで, 本論では三次元の場合に, 体分布多重調和関数を用いる補間法, および数値積分法を提案する. 数値実験によって, 計算が安定に行われ, したがって, 計算結果の精度もよく, かつ計算時間も短縮されることが確認された.

2. 理 論

2.1 多重調和関数による補間

多重調和関数を用いた補間法の概要を簡単に示す.

一次元の場合に, 分布するデータの値 $W_1^L(x)$ を次式で近似する.

$$(2.1) \quad \nabla_{(1)}^2 W_1^L(x) = -W_2^L(x),$$

$$(2.2) \quad \nabla_{(1)}^2 W_2^L(x) = -W_3^P(x_i).$$

ただし、 $\nabla_{(1)}^2 = d^2/dx^2$ であり、 W_2^L は W_1^L の曲率*である。また、 $W_3^P(x_i) = W_3^P \delta(x-x_i)$ であり $\delta(x-x_i)$ はディラックのデルタ関数である。式(2.1)、(2.2)より次式が得られる。

$$(2.3) \quad \nabla_{(1)}^4 W_1^L(x) = W_3^P(x_i).$$

これは、図1に示すような点荷重 W_3^P を伴う梁の変位 W_1^L を求める式と同じものであるが、ここでは、いくつかの梁の変位 W_1^L が与えられており、未知の点荷重 W_3^P を逆に求めて補間が行われる。ただし、梁は単純支持されており、両端でモーメント W_2^L を0と仮定している。なお、これは自然スプラインと同じものである[5,11]。

二次元の場合、よく知られた二次元スプラインにおいては、一次元のスプライン関数を x と y 方向に掛けることが行われている。一方、多重調和関数を用いる方法では、次式により補間を行う。

$$(2.4) \quad \nabla_{(2)}^2 W_1^S = -W_2^S,$$

$$(2.5) \quad \nabla_{(2)}^2 W_2^S = -W_3^P.$$



Fig. 1. Beam with unknown point load for interpolation

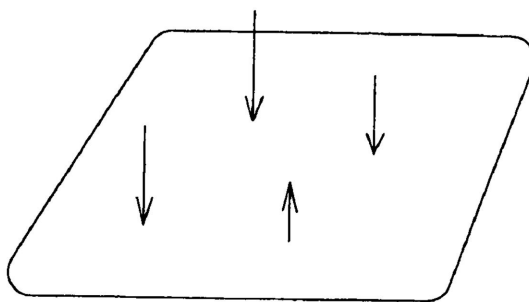


Fig. 2. Fictitious thin plate for two-dimensional interpolation

* 曲線 $y = f(x)$ の曲率は $f''/(1+f'^2)^{3/2}$ で与えられるから、 W_2^L を曲率とよぶことは正しくないが、材料力学の分野では、近似的な意味でこのようによんでいるので、この習慣に従う。以下、二次元、三次元でも同様の注意があてはまる。

ただし,

$$(2.6) \quad \nabla_{(2)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$W_3^P(x_i) = W_3^P \delta(x - x_i)$ であり $\delta(x - x_i)$ はディラックのデルタ関数である. 式(2.4), (2.5)より次式が得られる.

$$(2.7) \quad \nabla_{(2)}^4 W_1^S = W_3^P(x_i).$$

これは, 図2に示すような点荷重 W_3^P を伴う薄板の変位 W_1^S を求める式と同じものである. しかし, ここでは, いくつかの点で薄板の変位 W_1^S が与えられており, 未知の点荷重の値 W_3^P を逆に求めて, 補間が行われる. ただし, 薄板の縁でモーメントに相当する W_2^S が0と仮定する. 式(2.4), (2.5)を解くにあたっては境界積分方程式を用いる. その際, 下記の調和関数および重調和関数を用いる.

$$(2.8) \quad T_1(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$(2.9) \quad T_2(P, Q) = \frac{r^2}{8\pi} \left[\ln\left(\frac{1}{r}\right) + 1 \right].$$

ただし, r は二点 P, Q 間の距離である. 式(2.9)の重調和関数は, 下記の薄板スプライン F_2 と同等の関数である[3,4].

$$(2.10) \quad F_2(P, Q) = r^2 \ln(r).$$

論文[6,8]では, これらの事柄が一般化されている.

三次元の場合には, 多重調和関数を用いて滑らかな補間を得るために方程式の数 F を3として補間を行う[6].

$$(2.11) \quad \nabla^2 W_1^V = -W_2^V,$$

$$(2.12) \quad \nabla^2 W_2^V = -W_3^V,$$

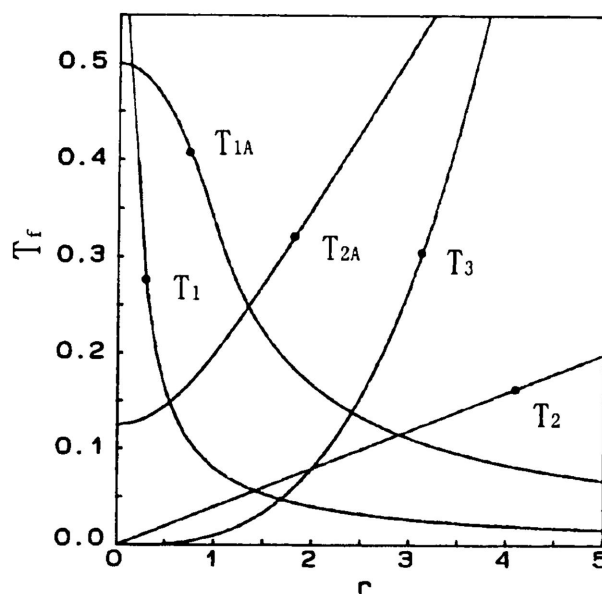
$$(2.13) \quad \nabla^2 W_3^V = -W_4^P.$$

なお, 三次元の場合, $F=2$ では滑らかな補間が得られない. 実際, 三次元の多重調和関数 T_f は,

$$(2.14) \quad T_f(P, Q) = \frac{r^{2f-3}}{4\pi(2f-2)!}$$

で与えられ, 図3から分かるように, 重調和関数 T_2 は, r の関数であり, $r=0$ で滑らかではないので, 式(2.4), (2.5)を用いた補間では滑らかな補間が得られない. 実例を数値実験のところで示す.

しかしながら, 式(2.11)~(2.13)のように $F=3$ としたために, 補間の安定性に問題が発生し, しかも, 離散化して得られる連立方程式を解くのに時間が多く必要となる[6]. 補間が不安定になる場合がある原因は, 本補間では連立積分方程式を数値的に解く必要があり, 被積分関数 r^{-1}, r, r^3 を含むため, それらを離散化して得られる連立方程式の係数行列の成分の値が大きく変化し, 連立方程式は悪条件になるためである. 実例を数値実験のところで示す.

Fig. 3. Functions (T_f , T_{fA})

2.2 体分布多重調和関数による補間

二次元の場合，式(2.7)においては点荷重を考えたが，[9]において，半径 A の円形領域に一様な分布荷重 W_3^A を与えたほうが，滑らかな補間が得られることが示されている．より詳しく述べると，以下のようなものである．点荷重の場合，荷重点におけるモーメントおよび薄板の曲率 W_2^S が無限になる．半径 A の部分に一様な分布荷重 W_3^A を与えた場合，モーメントおよび薄板の曲率 W_2^S は有限値になり，点荷重の場合より滑らかな曲面となる．しかし，分布荷重 W_3^A で表現した場合，分布の状態を表す情報が必要になる．そこで，半径 A の円形領域に一様な分布荷重 W_3^A を与えるとするとき，半径 A と中心点の位置情報だけで処理することができる．なお，半径 A の円形領域の一様な分布荷重 W_3^A を W_{3A}^P と置き，点荷重の場合と同様に連立積分方程式における領域積分を避けるために，分布荷重 W_3^A が作用する領域 Ω_A に関して次式で示される体分布多重調和関数を用いる．

$$(2.15) \quad T_{fA} = \int_{\Omega_A} T_f d\Omega_A.$$

二次元問題の場合の体分布調和関数 T_{fA} の具体形は以下のようなものである．

$$(2.16) \quad T_{1A}^{[2]} = \frac{1}{2} A^2 \ln(r) \quad r > A,$$

$$(2.17) \quad T_{1A}^{[2]} = \frac{-1}{4} [2A^2 \ln(A) - A^2 + r^2] \quad r \leq A,$$

$$(2.18) \quad T_{2A}^{[2]} = \frac{1}{16} [-\ln(r)(A^4 + 2A^2 r^2) + 2A^2 r^2] \quad r > A,$$

$$(2.19) \quad T_{2A}^{[2]} = \frac{1}{64} [-4A^4 \ln(A) - 8A^2 r^2 \ln(A) - r^4 + 5A^4 + 4A^2 r^2] \quad r \leq A,$$

三次元の場合，上記の二次元の結果をうけて，安定かつ滑らかな補間を得るために，次のような半径 A

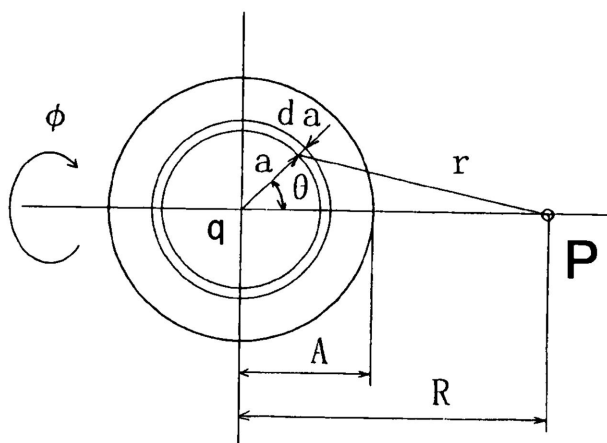


Fig. 4. Notations for polyharmonic function of volume distribution

の球の一様分布 W_{3A}^P を用いた補間を考える。

$$(2.20) \quad \nabla^2 W_1^V = -W_2^V,$$

$$(2.21) \quad \nabla^2 W_2^V = -W_{3A}^P.$$

式(2.21)を導入すると、次式で定義される体分布多重調和関数 T_{fA} が必要になる(図4参照)。

$$(2.22) \quad T_{fA}(P, q) = \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_f(r) a^2 \sin \theta d\theta d\phi da$$

ただし、図4に示すように観測点 P から体分布関数の中心 q までの距離を R とする[12]。式(2.22)の積分を行うと R の関数となるが、式(2.14)との整合性のために R を r と書き改めて、本論文に必要な体分布多重調和関数の具体形を以下に示す。

$$(2.23) \quad T_{1A} = \frac{A^3}{3r} \quad r > A,$$

$$(2.24) \quad T_{1A} = \frac{3A^2 - r^2}{6} \quad r \leq A,$$

$$(2.25) \quad T_{2A} = \frac{A^3}{6r} \left(r^2 + \frac{A^2}{5} \right) \quad r > A,$$

$$(2.26) \quad T_{2A} = -\frac{r^4 - 15A^4 - 10r^2 A^2}{120} \quad r \leq A.$$

式(2.20), (2.21)を解くために、式(2.20), (2.21)を境界積分形に変形する。点 q のまわりに半径 A の一様分布状態 $W_{3A}^P(q)$ の数を M とし、領域 Ω の境界の面積要素を dS とすると、式(2.20), (2.21)およびグリーン定理より次式が得られる[6,7,8]。

$$(2.27) \quad cW_1^V(P) = -\sum_{f=1}^2 (-1)^f \int_{\Gamma} \left\{ T_f(P, Q) \frac{\partial W_f^V(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_f(P, Q)}{\partial n} W_f^V(Q) \right\} dS \\ - \sum_{m=1}^M T_{2A}(P, q) W_{3A(m)}^P(q).$$

ただし, c は P が滑らかな境界上にあるときは 0.5 であり, 内点のときは 1 の値をとる. 大文字 Q は境界上の点, 小文字 q は内点を示すものとする. 同様に式(2.21)より, 次式が得られる.

$$(2.28) \quad cW_2^V(P) = \int_{\Gamma} \{T_1(P, Q) \frac{\partial W_2^V(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_1(P, Q)}{\partial n} W_2^V(Q)\} dS + \sum_{m=1}^M T_{1A}(P, q) W_{3A(m)}^P(q).$$

式(2.27), (2.28)を用いて補間を行うための具体的計算手順は 2.4 節で与えられる. 大雑把に言えば, 補間のために与えられた境界上の点の値と任意位置の内点の値から, 式(2.27), (2.28)を用いて $\frac{\partial W_f^V}{\partial n}$, W_{3A}^P の値を求め, それを式(2.27)に代入して, 補間点での値を計算する.

式(2.21)を導入するとき, 半径 A の球領域に一様に分布させた状態を示す体分布多重調和関数 T_{2A} を用いたが, 一般的には一様に分布させる必要はない. この時, T_{2A} の代わりに, 分布布状態を示す関数 $B(\theta, \phi, a)$ を用いて, 次式で定義される関数を用いることになる.

$$(2.29) \quad T_{fB} = \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_f(r) B(\theta, \phi, a) a^2 \sin \theta d\theta d\phi da.$$

CAD や CG などにおいては, 補間された分布の微分値が重要な働きをするので, 補間された分布の勾配を求める式を示す. 式(2.27)を x_i ($i=1, 2, 3$) で微分すると, 次式が得られる.

$$(2.30) \quad \frac{\partial W_1^V(P)}{\partial x_i} = -\sum_{f=1}^2 (-1)^f \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial T_f(P, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial W_f^V(Q)}{\partial n} - \frac{\partial^2 T_f(P, Q)}{\partial x_i \partial n} W_f^V(Q) \right\} dS - \sum_{m=1}^M \frac{\partial T_{2A}(P, q)}{\partial x_i} W_{3A(m)}^P(q).$$

ただし,

$$(2.31) \quad \frac{\partial T_f}{\partial x_i} = \frac{(2f-3)r^{2f-4}}{4\pi(2f-2)!} \frac{\partial r}{\partial x_i},$$

$$(2.32) \quad \frac{\partial T_{2A}}{\partial x_i} = \frac{A^3(5r^2 - A^2)}{30r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad r > A,$$

$$(2.33) \quad \frac{\partial T_{2A}}{\partial x_i} = \frac{5rA^2 - r^3}{30} \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad r \leq A.$$

上式において, 2 点を x_i ($i=1, 2, 3$) と x_i' とすると, $\partial r / \partial x_i = (x_i - x_i') / r$ である.

2.3 数値積分法

任意境界形状内で定義された関数の数値積分方法を示す. まず, 分布 W_1^V が式(2.11)~(2.13)で補間した場合, グリーンの定理を活用し, 領域積分を境界積分に変換するために, 関数 $\psi_0 = 1$ を定義し, 次式で与えられる関数 ψ_f を使用する.

$$(2.34) \quad \nabla^2 \psi_f = \psi_{f-1}.$$

式(2.11)~(2.13), $W_1^V = W_1^V \psi_0$, 式(2.34)およびグリーンの定理より次式が得られる.

$$(2.35) \quad \int_{\Omega} W_1^V(p) d\Omega = \sum_{f=1}^3 (-1)^f \int_{\Gamma} \left\{ \psi_f(p, Q) \frac{\partial W_f^V(Q)}{\partial n} - \frac{\partial \psi_f(p, Q)}{\partial n} W_f^V(Q) \right\} dS - \sum_{m=1}^M \psi_3(p, q) W_{4(m)}^P(q).$$

ただし, p は任意点を示し, 式(2.35)の積分値は点 p の位置によらない値となり, p は領域外であってもよい. なお, n 次元問題の場合, 次式により式(2.35)の関数 ψ_f が求められる.

$$(2.36) \quad \psi_f = \int \frac{1}{r^{n-1}} \left[\int r^{n-1} \psi_{f-1} dr \right] dr.$$

三次元の場合の ψ_f および $\partial\psi_f/\partial n$ は次式となる.

$$(2.37) \quad \psi_f = \frac{r^{2f}}{(2f+1)!},$$

$$(2.38) \quad \frac{\partial\psi_f}{\partial n} = \frac{2fr^{2f-1}}{(2f+1)!} \frac{\partial r}{\partial n}.$$

同様に, 式(2.20), (2.21)で補間した場合は, 次式となる.

$$(2.39) \quad \int_{\Omega} W_1^V d\Omega = \sum_{f=1}^2 (-1)^f \int_{\Gamma} \left\{ \psi_f(p, Q) \frac{\partial W_f^V(Q)}{\partial n} - \frac{\partial \psi_f(p, Q)}{\partial n} W_f^V(Q) \right\} dS + \sum_{m=1}^M \psi_{2A}(p, q) W_{3A(m)}^P(q).$$

ただし, 関数 ψ_{fA} は次式で得られる.

$$(2.40) \quad \psi_{fA} = \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi_f(r) a^2 \sin\theta d\theta d\phi da.$$

式(2.40)の関数 ψ_{2A} は, r の値に関係なく次式で与えられる.

$$(2.41) \quad \psi_{2A} = \frac{\pi A^3 (3A^4 + 14A^2 r^2 + 7r^4)}{630}.$$

式(2.39)を用いて, 数値積分を行うための具体的計算手順は 2.4 節で与えられる. 大雑把に言えば, 与えられた境界上の W_1^V と補間の計算において計算された $\frac{\partial W_f^V}{\partial n}$ ($f=1,2$), W_{3A}^P を式(2.39)に代入することによって, 積分値が計算される. なお, 二次元の場合, 関数 ψ_f , その法線方向微分, および関数 ψ_{2A} は次式で与えられる.

$$(2.42) \quad \psi_f = \frac{r^{2f}}{[(2f)!!]^2},$$

$$(2.43) \quad \frac{\partial\psi_f}{\partial n} = \frac{r^{2f-1}}{(2f)!!(2f-2)!!} \frac{\partial r}{\partial n},$$

$$(2.44) \quad \psi_{2A} = \frac{\pi A^2 (A^4 + 6A^2 r^2 + 3r^4)}{384}.$$

また, 一次元の場合も, 関数 ψ_f , その法線方向微分, および関数 ψ_{fA} は次式で与えられる.

$$(2.45) \quad \psi_f = \frac{r^{2f}}{(2f)!},$$

$$(2.46) \quad \frac{\partial\psi_f}{\partial n} = \frac{r^{2f-1}}{(2f-1)!} \frac{\partial r}{\partial n},$$

$$(2.47) \quad \psi_{fA} = \frac{(A+r)^{2f+1} + (A-r)^{2f+1}}{2(2f+1)!}.$$

2.4 補間および数値積分の具体的計算手順

補間の場合 まず, 境界上および, いくつかの内点での関数値から, 式(2.27), (2.28)の $\partial W_f^V / \partial n$ や W_{3A}^P を求める. 任意の点での関数の補関値は, 計算された $\partial W_f^V / \partial n$, W_{3A}^P を用いて, 式(2.27)より計算する. 以下, 式(2.27)および(2.28)を離散化に際し, 境界に対して一定要素を用いることにする. $W_f^V(Q)$ を成分に持つベクトル \mathbf{W}_f , $\partial W_f^V(Q) / \partial n$ を成分に持つベクトルを \mathbf{V}_f , $W_{3A(m)}^P$ を成分に持つベクトルを \mathbf{W}_3^P とし, p および q は内点を示すものとする. 式(2.27)を離散化すると次式が得られる[1].

$$(2.48) \quad \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1 = \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_2 \mathbf{W}_2 - \mathbf{G}_2 \mathbf{V}_2 - \mathbf{G}_2^P \mathbf{W}_3^P.$$

ただし, \mathbf{H}_1 , \mathbf{G}_1 , \mathbf{H}_2 , \mathbf{G}_2 および \mathbf{G}_2^P は, 点 i で離散化し, dS_j で面積分を行った場合, 次式の成分を持つマトリックスである.

$$(2.49) \quad H_{1ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int_{S_j} \frac{\partial T_1(P_i, Q)}{\partial n} dS_j(Q),$$

$$(2.50) \quad G_{1ij} = \int_{S_j} T_1(P_i, Q) dS_j(Q),$$

$$(2.51) \quad H_{2ij} = \int_{S_j} \frac{\partial T_2(P_i, Q)}{\partial n} dS_j(Q),$$

$$(2.52) \quad G_{2ij} = \int_{S_j} T_2(P_i, Q) dS_j(Q),$$

$$(2.53) \quad G_{2ij}^P = T_{2A}(P_i, q_j^P).$$

ただし, 上添え字 P は W_{3A}^P を与える点であることを示す. $\mathbf{W}_2^V(\mathbf{P})$ に関して式(2.28)より次式が得られる.

$$(2.54) \quad \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_2 = \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_2 + \mathbf{G}_1^P \mathbf{W}_3^P.$$

ただし, \mathbf{G}_1^P は, 次式の成分を持つマトリックスである.

$$(2.55) \quad G_{1ij}^P = T_{1A}(P_i, q_j^P).$$

また, 式(2.27)において, 値 $W(p^P)$ の内点を活用すると次式が得られる.

$$(2.56) \quad \mathbf{W}(p^P) = -\mathbf{H}_3 \mathbf{W}_1 + \mathbf{G}_3 \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_4 \mathbf{W}_2 - \mathbf{G}_4 \mathbf{V}_2 - \mathbf{G}_3^P \mathbf{W}_3^P.$$

ただし, \mathbf{H}_3 , \mathbf{G}_3 , \mathbf{H}_4 , \mathbf{G}_4 および \mathbf{G}_3^P は, 次式の成分を持つマトリックスである.

$$(2.57) \quad H_{3ij} = \int_{S_j} \frac{\partial T_1(p_i^P, Q)}{\partial n} dS_j(Q),$$

$$(2.58) \quad G_{3ij} = \int_{S_j} T_1(p_i^P, Q) dS_j(Q),$$

$$(2.59) \quad H_{4ij} = \int_{S_j} \frac{\partial T_2(p_i^P, Q)}{\partial n} dS_j(Q),$$

$$(2.60) \quad G_{4ij} = \int_{S_j} T_2(p_i^P, Q) dS_j(Q),$$

$$(2.61) \quad G_{3ij}^P = T_{2A}(p_i^P, q_j^P).$$

$W_2=0$ と置くと、式(2.48), (2.54), (2.56)より次式が得られる.

$$(2.62) \quad \begin{bmatrix} G_1 & -G_2 & -G_2^P \\ 0 & G_1 & G_1^P \\ G_3 & -G_4 & G_3^P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ W_3^P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1 W_1 \\ 0 \\ H_3 W_1 + W(p^P) \end{Bmatrix}.$$

上式より V_1 , V_2 および W_3^P を求めることができる. 任意点の補間値は, 求められた V_1 , V_2 , W_3^P を用いて式(2.27)より計算する. 式(2.62)では $W_2=0$ と置いたが, 面对称の所では $V_2=0$ と置いてもよい. 一定要素を用い, 境界を N_0 分割し, 内点を N_1 点使用した場合, $(2N_0+N_1)$ 次の連立方程式を解かなければならない. なお, $F=3$ とし, 体分布調和関数を用いない場合は $(3N_0+N_1)$ 次の連立方程式を解かなければならない.

式(2.50), (2.52)の計算において $i=j$ の場合の成分の計算方法を示す. 四角形一定要素を使用する場合, 図5(a)のように要素を分割し, 図5(b)の記号を使用すると, 次式の積分で計算することができる[1].

$$(2.63) \quad \int_{S_j} T_1(P, Q) dS_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-M_e}{(y_1' - y_2') \cos \theta + (x_2' - x_1') \sin \theta} d\theta,$$

$$(2.64) \quad \int_{S_j} T_2(P, Q) dS_j = \frac{1}{3\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-M_e^3}{[(y_1' - y_2') \cos \theta + (x_2' - x_1') \sin \theta]^3} d\theta.$$

ただし, M_e は三角形の面積である.

数値積分の場合 式(2.39)の数値積分の式も上記と同様に離散化することができる.

$$(2.65) \quad \int_{\Omega} W_1^V d\Omega = \Phi_1 W_1 - \Psi_1 V_1 - \Phi_2 W_2 + \Psi_2 V_2 + \Psi_3^P W_3^P$$

ただし, Φ_1 , Ψ_1 , Φ_2 , Ψ_2 および Ψ_3^P は, 次式の成分を持つ行ベクトルである.

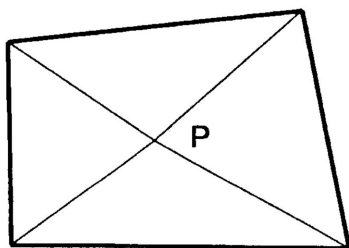
$$(2.66) \quad \Phi_{1j} = \int_{S_j} \frac{\partial \psi_1(p, Q)}{\partial n} dS_j(Q),$$

$$(2.67) \quad \Psi_{1j} = \int_{S_j} \psi_1(p, Q) dS_j(Q),$$

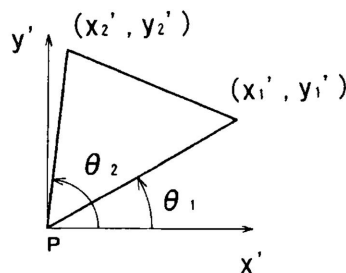
$$(2.68) \quad \Phi_{2j} = \int_{S_j} \frac{\partial \psi_2(p, Q)}{\partial n} dS_j(Q),$$

$$(2.69) \quad \Psi_{2j} = \int_{S_j} \psi_2(p, Q) dS_j(Q),$$

$$(2.70) \quad \Psi_{3j}^P = \psi_{2A}(p, q_j^P).$$



(a) Element



(b) Co-ordinates

Fig. 5. Notation for integral

積分値は、式(2.62)より求められた V_1 , V_2 , W_3^P を代入することによって計算される。

3. 活用例

外形の形状および内点が与えられた場合の補間例を示す。図6(a), (b)に1辺の長さは10の立方体の要素分割と内点の例を示す。立方体の表面の値を1とし、ボトル容器の表面点(白丸)を0とし、ボトル容器の内点の黒丸を-1とする。図7(a)に体分布多重調和関数 $T_{2,4}$ を用いて補間した場合の例を、図6(a)における $y=5$ における断面で示す。この図より、この補間は立体形状を作成することに使用できることが分かる。つまり、レイトレーシングにより、値が0の面を探索し、その表面点の法線を式(2.30)を用いて計算することにより、立体をCRT上に表示することができる[10]。図7(b)に、このようにして得られた立体の例を示す。方程式の数を $F=2$ とし、関数 T_2 を用いた場合を図7(c)に示す。この例から分かるように $F=2$ を用いた場合、連続(C_0)ではあるが滑らかな補間が得られない。小さな窪みは、指定した表面点である。また、 $F=3$ とし、関数 T_3 を用いた場合、図7(d)に示すように滑らかな補間が得られるが、角部の補間が乱れていることが分かる。なお、半径 A は最も近い他の表面点または内点までの距離の1/2とした。

この補間は図7のような単純な形状である必要はなく、図8(a)のミロのビーナスの表面点から図8(b)の形状を得ることができる。

次に、次式の三重積分の数値積分を行った。

$$(3.1) \quad I_1 = \int_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) d\Omega = \int_0^L \int_0^L \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) dx dy dz$$

図9(a), (b)に境界の要素分割と使用した内点を示す。 $L=10$ とした場合、上式の厳密な値は $\left(\frac{2L}{\pi}\right)^3 = 258.01\dots$

であり、式(2.39)を用いた数値積分の値は259.0であった。ただし、境界は一定要素を使用し、領域境界の面積分には8点ガウス積分を使用した。数値積分の精度は、境界要素数と内点を増加すると向上する。 $F=3$ とし、体分布多重調和関数を使用しない場合、Pentium IVのCPUを用いた計算時間は5.02倍必要となり、計算値は不安定性のため239.5となった。 $F=3$ の場合には、境界の分割数多くすると逆に計算誤差が増加し、値が減少する傾向があった。プログラム作成を容易にするために、一定要素を使用した。数値積分の精度を向上させるには境界に対して高次の要素を使用する必要がある。

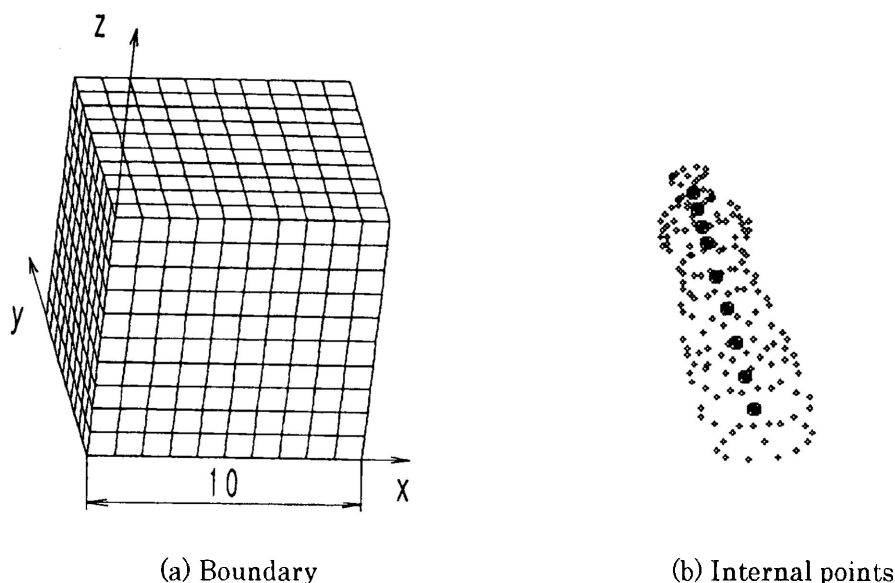
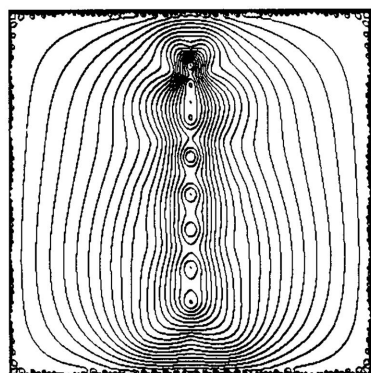
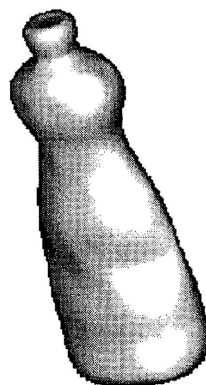


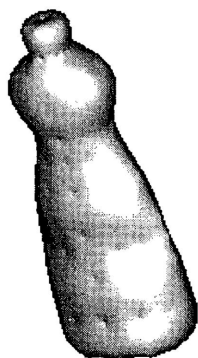
Fig. 6. Interpolation using integral equation (Bottle)



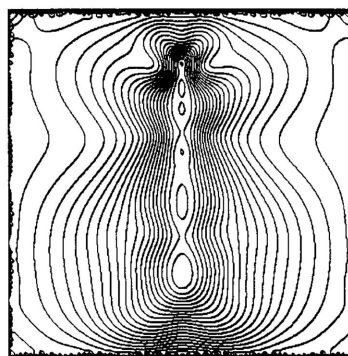
(a) Contour line ($\nu=5, T_{2A}$)



(b) Obtained shape (T_{2A})

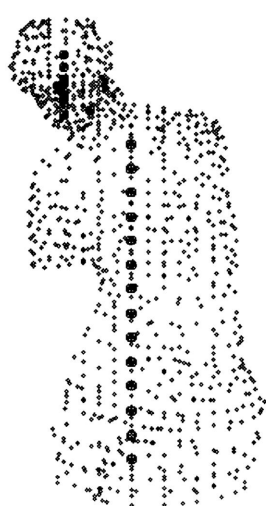


(c) Obtained shape (T_2)

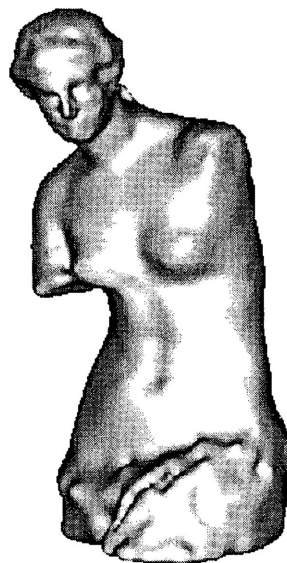


(d) Contour lines (T_3)

Fig. 7. Interpolation using integral equation (Bottle)



(a) Surface points



(b) Obtained shape (T_{2A})

Fig. 8. Interpolation using integral equation (Venus de Milo)

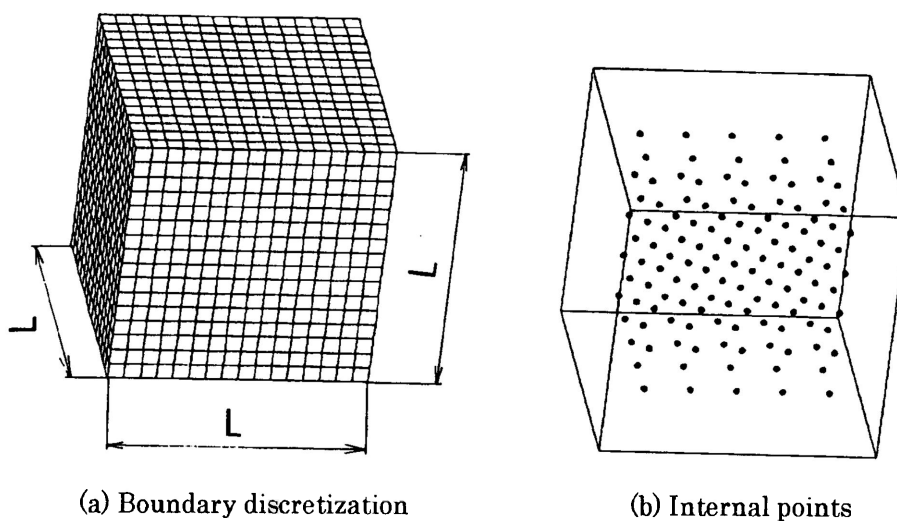


Fig. 9. Triple integral (Cube)

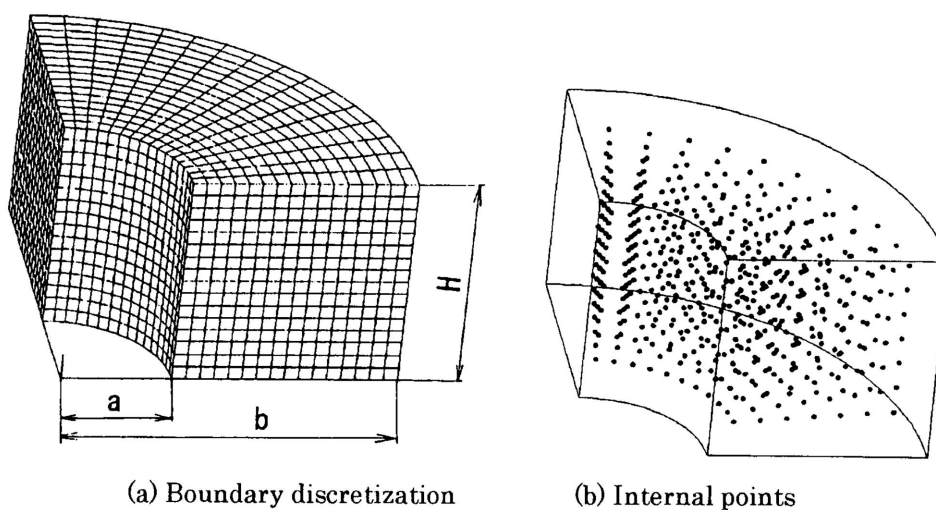


Fig. 10. Triple integral (Cylinder)

次に、図 10(a)に示す中空円筒の 1/4 領域の数値積分を行った。被積分関数を $W(r)$ は次式で与えられるものとする。

$$(3.2) \quad W(r) = \frac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2}$$

内半径 $a=10$ 、外半径 $b=30$ 、高さ $H=20$ とし、図 10(b)の内点($11 \times 7 \times 7$)を使用した。

$$(3.3) \quad I_2 = \int_V W dV$$

厳密な積分値 I_2 は 6283.16... であり、数値計算値は 6319.44 であり、相対誤差は 0.58% であった。数値積分の精度を向上させるには境界に対して高次の要素を使用する必要がある。

4. 結 言

体分布多重調和関数および積分方程式を用いた三次元補間法を提案した。本補間法では任意外形形状の領域内の関数が補間できるので、従来のスプライン関数を用いる場合に比べて活用しやすい。また、同様に本数値積分法は任意外形形状の領域での数値積分が可能であり、積分点も任意の位置に置くことができ、実用上有効である。三次元問題の場合、体分布多重調和関数を使用することにより、多重調和関数を使用する場合に比べて、安定した補間が得られ、しかも計算時間が短縮することができる。数値積分において重要な計算精度の向上に関する研究を今後行う予定である。

参 考 文 献

- [1] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., *Boundary Element Techniques — Theory and Applications in Engineering*, Springer Verlag, Berlin, (1984), (境界要素解析・理論と応用, 田中正隆訳, (1984), pp.46-70, pp.274-276, 丸善) .
- [2] Davis, P.J. and Rabinowitz, P., *Methods of Numerical Integration*, 2nd ed., Academic Press, London, (1983).
- [3] Dyn, N., *Interpolation of Scattered Data by Radial Functions*, in *Topics in Multivariate Approximation*, Eds. C.K Chui, L.L. Schumaker and F.I. Utreras, Academic Press, London, (1987), pp.47-61.
- [4] Frank, R., *Scattered Data Interpolation: Tests of Some Methods*, *Math. Comp.*, Vol.38, (1982), pp.181-200.
- [5] 市田浩三, 吉本富士市, *スプライン関数とその応用*, 教育出版, (1979).
- [6] 落合芳博, *多重調和関数を用いた補間および数値積分法*, *日本応用数理学会論文誌*, Vol.8, No.4, (1998), pp.457-468.
- [7] 落合芳博, *多重調和関数を用いた軸対称数値積分法*, *日本応用数理学会論文誌*, Vol.10, No.2, (2000), pp.199-210.
- [8] Ochiai, Y. and Sekiya, T., *Generation of Free-Form Surface in CAD for Dies*, *Advances in Engineering Software*, Vol.22, (1995), pp.113-118.
- [9] Ochiai, Y. and Yasutomi, Z., *Improved Method Generating a Free-Form Surface Using Integral Equation*, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.17, (2000), pp.233-245.
- [10] Roth, S.D., *Ray Casting for Modeling Solids*, *Computer Graphics and Image Processing*, Vol.18, (1982), pp.109-144.
- [11] 桜井明, *Cによるスプライン関数*, 東京電機大学出版局, (1993).
- [12] 佐藤正千代, 新濃清志, *ポテンシャル*, 培風館, (1984), pp.26-29.

落合芳博 (正会員) 〒577-8502 東大阪市小若江3の4の1 ochiai@mech.kindai.ac.jp

1975年大阪府立大学機械工学科卒業, 1977年大阪府立大学工学研究科修士課程修了, 工学博士, 大阪府立産業技術総合研究所主任研究員, 現在, 近畿大学大学院総合理工学研究科教授

(2002年12月24日受付)

(2004年7月12日最終稿受付)