商経学叢　第58巻第3号　2012年3月

密輸ゲームにおける2隻の取締艇による取締効果

宝　崎　隆　祐・前　原　裕　樹

概要　この論文は，取締者と密輸者がプレイする密輸取締ゲームを取り扱っている。ゲームは決められた日数で行われ，取締者はその間に許容された延べ隻数の取締艇の派出が可能であるが，1隻を派遣するか，2隻を派遣するかを選択して効果的な取締を考えることができる。一方，密輸者も許容された回数の範囲内で密輸を企図する。取締者は密輸者を拿捕できたときに利得を得，密輸者は密輸成功により利益を得るが，支払全体ではゼロ和である。各日ごとに相手プレイヤーの過去の行動戦略が観測できるとする多くの従来研究に対し，この論文では，お互いの手の内が分からない状況下でのプレイヤーの最適戦略を導出し，その分析を行う。

キーワード　密輸ゲーム，1段階ゲーム，動的計画
原稿受理日　平成23年11月14日

Abstract　This paper deals with a smuggling game with Customs and a smuggler. Within the limited number of days, Customs can afford to use one or two boats simultaneously within the limit of the total number of dispatching boats and the smuggler can try to ship contraband within the allowed number of smuggling. The capture of the smuggler brings Customs some reward and the success of smuggling gives the smuggler some gains although the payoff of the game is zero-sum. Almost all researches on the smuggling game assume that players know their opponents' past behaviors. In this paper, we develop a methodology to derive optimal strategies of players and analyze them under the circumstance of unconsciousness of adversary behavior.

Key words　smuggling game, one-shot game, dynamic programming

1　はじめに

税関における輸出入物品の検査や密輸品等の禁制品の取締に限らず，核物質の国際査察や兵力削減交渉における査察や検閲を取り扱うゲームを Inspection ゲームと総称する。Inspection ゲームの研究は，兵力削減条約の遵守に関し Dresher[6] が行った多段階の２人ゼロ和ゲームの研究に遡ることができる。彼のモデルを一般化したのが Maschler[14] である．彼らのモデルでは，プレイヤー I は条約遵守のための条約国に時折査察を実施する査察者であり，プレイヤー II は条約違反行為を行うことにより得られるであろう利益に絶えず誘惑される条約国との設定となっている。

その後，彼らの研究は２つの大きな適用分野をもつに至る。１つは彼らの従来モデルである軍縮条約等に関する査察問題であり，また近年原子力発電所等の核施設の普及とともに重要な役割を演じているＩＡＥＡ (国際原子力機関）の核査察問題である。Canty ら [5] や Avenhaus ら [1, 2, 3]，Hohzaki[11] の研究はこの分野に属している。Avenhaus ら [2] は，この分野における研究のサーベイ論文である。Canty ら [5] の研究は，放射性物質のサンプリング検査を行う問題を逐次ゲームにより分析し，１人の被査察者を条約遵守へ導く効果的な検査法を考察したものである。Avenhaus and Canty[1] では，同様な逐次ゲームを用い，複数回の査察結果に錯誤が生じることを考慮した上で非合法活動のタイムリーな発見を目的とした問題設定となっている。Avenhaus and Kilgour[3] のモデルは，１回の査察機会において２つの被査察国に対する査察資源の効果的な分割方法を議論した非ゼロ和の１ショットゲームである。このような査察者による査察資源の分割戦略を，複数の被査察国における複数の査察対象施設への分割に拡張させたのが Hohzaki[11] である。これらの研究の動機は，それまでのＩＡＥＡによる査察実施計画が核関連物質の量を基準に立案されるという，いわゆる“ 比例の原則 ”が条約国の非合法活動に対する意図を無視していたため非効率となっていた査察状況をゲーム論の観点から明らかにし，その改善を提案するものである。

Dresher 及び Maschler の研究の第２の拡張は，密輸者とその違法行為を取り締まる機関との間でプレイされる密輸取締ゲームに対し行われた。Thomas and Nisgav[16] は，１隻あるいは２隻のボートを用いて行われる税関と１回の密輸を計画する密輸者側との問題を多段繰り返しゲームに定式化し，数値解法による均衡解の分析を行っている。これに対し，ゲームの値を閉じた式で与えたのが Baston and Bostock[4] である。それまでの研究では，違反行為及び密輸行為は査察または監視により必ず摘発されるとした“完全摘発” のケース

のみが考えられていたが，彼らは，ボートの隻数により摘発確率が異なるとする拡張したモデルに対し，その解析解の導出に成功している。Garnaev[8] は，使用ボートの隻数を 3 隻まで許したモデルにより，彼らの研究成果を拡張した。

以上のモデルに対し，Sakaguchi[15] は，Baston and Bostock のモデルで密輸機会が 1 回切りであったのを，完全摘発の仮定の下ではあるが複数回の密輸決行の可能性をもつモデルに変更した。Sakaguchi モデルを拡張したと言えるのが，Ferguson and Melolidakis [7] である。彼らは，Inspection ゲームの初期の研究にあったように別払いの仮定を付加し，複数回実施可能な不法行為を 1 回免除される毎にあるコストが伴うとして，密輸者の最適戦略に関する考察を行っている。Sakaguchi モデルのもう 1 つの拡張に Hohzaki ら [9, 10] がある。そこでは，不法行為実施中のパトロールは必ずしも完全ではなく,「摘発」,「不法行為成功」,「そのいずれでもない」の 3 つの結果が確率的に生じるとし，それ以前の従来研究が繰り返しゲームによるモデル化を採用していたのに対し，問題を確率ゲームにより議論している。また，以上の従来研究では “密輸を行う” か “密輸を行わない” かの 2 者選択であった密輸者の戦略を密輸量決定とし，最終的な密輸成功量を密輸者の獲得利益とした取締ゲームの研究として，宝崎 [12] の成果がある。

ゲームにおいてはプレイヤーの取得情報の確実性に関する仮定は大変重要であり，多段階で行われる取締ゲームのほとんどの従来研究では，各段階が終了するごとに両プレイヤーの情報が互いに知るところとなるモデルが採用されていた。しかし，実際には密輸取締に関わる両プレイヤーの計画の秘匿性は高く，その情報が漏れることはあまりないと考えられる。相手プレイヤーの情報を知り得ない同時手番の 1 段階ゲームの状況下で，パトロールの実施時期の効果に焦点を絞って問題を論じているものに Hohzaki and Maehara[13] がある。また，上述した従来研究でもパトロールボートの派出隻数について論じている研究はあるが，そのような視点は限られた密輸取締予算の効率的な使用法と関連している。日本における税関や海上保安庁といった公的機関が密輸取締関連予算の使用に際し，短期間での集中的使用か，あるいは長い期間にわたる取締を意図すべきかの分析にも役立つ。この目的のため，本論文では Hohzaki and Maehara のモデルをパトロールボートの派出隻数の取締効果を組み入れたモデルに拡張し，取締時期及び効果的な派出隻数に関する分析を 1 段階ゲームを用いて行う。

次の 2 節では，問題の数学モデルを述べ，その後 2 人のプレイヤーの戦略表現を考え，それぞれの期待支払の式を導出する。3 節では，この支払を支払行列として一般の行列ゲー

ムによって解く数値解法を提示するが，4 節では動的計画法による解法を提案し，小さなサイズの問題に対し解析的な考察が可能であることを示す。最後の 5 節では数値例を用いて，パトロール隻数の効果に関する考察を行う。

2　モデルの前提と定式化

ここでは，パトロールを実施して取締りを行う取締者と密輸を決行しようとしている密輸者との次のような 2 人ゼロ和の同時手番ゲームを考える。

A1.　2 人のプレイヤー，取締者と密輸者が 1 日に 1 回のアクションをとる全体で N 日のゲームを考える。

A2.　取締者は 2 隻の取締艇を有しており，N 日の間に，1 回のパトロールでは最大で 2 隻を，全体で M 隻の艇の派出が可能である。密輸者は最大で L 回の密輸が可能である。ただし，$M \leq 2N,\ L \leq N$ であるとする。

A3.　1 日の行動決定の際に，取締者は「取締艇 2 隻でパトロール実施」,「取締艇 1 隻でパトロール実施」,「パトロール未実施」の 3 つの戦略をとることができ，密輸者は「密輸決行」か「未決行」のどちらかの戦略をとることが可能である。

A4.　密輸者の密輸決行日における 1 隻のボートを用いた取締による密輸者の拿捕確率は p_1 であるが，同時に密輸が成功することも確率 q_1 で起こる。2 隻による拿捕確率は p_2 で，密輸成功確率は q_2 である。ただし，問題の性質より，$p_1+q_1 \leq 1, p_2+q_2 \leq 1$ であり，$p_1 < p_2 < 1, q_1 > q_2$ と仮定する。

また，パトロールが行われなければ決行された密輸は必ず成功し，密輸のない日にパトロールを行っても決して拿捕は生じない。

A5.　密輸者が摘発されるか，残り日数が尽きた場合にゲームは終了する。

A6.　摘発による取締者の利得は $\alpha > 0$ であり，密輸成功による密輸者の利得は 1 であるとする。ただし，取締艇 2 隻でのパトロール実施日に密輸者が密輸に出ることはないことを保証するため，$\alpha p_2 - q_2 > 0$ とする。ゲームの支払はゼロ和であり，取締者の利得で定義する。

A7.　前提 (A1)~(A6) は両プレイヤーの共有知識であるが，ゲームの中でプレイヤーが採った行動は相手プレイヤーには一切知られない。

(A4) での仮定から，密輸決行日における取締艇1隻と2隻によるそれぞれの期待利得 $\beta_1 \equiv \alpha p_1 - q_1$ と $\beta_2 \equiv \alpha p_2 - q_2$ の大小関係は，$\beta_1 < \beta_2$ となる。

全時点を $\boldsymbol{T} = \{1, 2, \ldots, N\}$ とし，プレイヤーの戦略表現を考えよう。時点 $i \in \boldsymbol{T}$ での取締者の戦略 $x(i)$ を，$x(i) = 2$（2隻での取締），$x(i) = 1$（1隻での取締）及び $x(i) = 0$（取締未実施）とし，戦略全体をベクトル $\boldsymbol{x} = (x(i), i \in \boldsymbol{T})$ で表現する。仮定 (A2) より，その実行可能性条件は次式となる。

$$\sum_{i=1}^{N} x(i) \leq M \tag{1}$$

密輸者の戦略を，時点 $i \in \boldsymbol{T}$ で密輸決行（$y(i) = 1$）または密輸未決行（$y(i) = 0$）を用いたベクトル $\boldsymbol{y} = (y(i), i \in \boldsymbol{T})$ で表現すると，その実行可能性条件は次式となる。

$$\sum_{i=1}^{N} y(i) \leq L \tag{2}$$

3 支払関数と行列ゲームによる定式化

以下ではプレイヤーの純粋戦略 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対する支払関数を求めてみよう。いま，時点 $n \in \boldsymbol{T}$ でのゲームを考える。前日の $n-1$ 時点までに密輸決行と2隻艇による取締が同時に行われた回数は，

$$T_2(n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} y(i) x(i) (x(i) - 1)$$

で表現できる。$x(i)(x(i)-1)$ は $x(i) = 2$ であるときのみ値2を持ち，その他ではゼロとなるからである。同様に，密輸決行と1隻艇が行われた回数は，$T_1(n) = \sum_{i=1}^{n-1} y(i) x(i) (2 - x(i))$ と表すことができる。したがって，拿捕が起こらずに時点 n までゲームが続く確率は，$(1-p_2)^{T_2(n)}(1-p_1)^{T_1(n)}$ である。時点 n での期待支払は，$(x(n), y(n)) = (2, 1)$ のとき β_2 であり，$(x(n), y(n)) = (1, 1)$ のとき β_1，$(x(n), y(n)) = (0, 1)$ ならば -1, その他の $(2, 0), (1, 0), (0, 0)$ ならば0である。以上を考慮すれば，取締者が戦略 $\boldsymbol{x}$ を，密輸者が戦略 $\boldsymbol{y}$ をとった場合の支払 $R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は次式となる。

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad &= \quad \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} y(n) \left\{ \beta_2 x(n)(x(n)-1) + 2\beta_1 x(n)(2 - x(n)) - (1 - x(n))(2 - x(n)) \right\} \\ &\quad \times (1-p_2)^{T_2(n)} (1-p_1)^{T_1(n)} \end{aligned}$$

以上により，最大化プレイヤーである取締者及び最小化プレイヤーである密輸者の純粋戦略のすべての組に対する支払行列が求められるから，通常の行列ゲームとして解けばプレイヤーの最適戦略とゲームの値が計算できる。しかし，条件 (1) や (2) を満たす戦略の総数

は，N が大きくなると急速に増大することなる。そこで，以下では取締者の戦略には支配関係が存在することを言い，できるだけ対象とすべき戦略の数を減少させよう。

補題 1 許容出動延べ隻数 M を全て派出するパトロール戦略は，そうでない戦略を弱く支配する。

証明: (i) 取締者の任意の戦略 $\boldsymbol{x}$ の中のある時点 i における $x(i)=1$ を $x(i)=0$ に置き換えた戦略を $\boldsymbol{x}'$ とし，両戦略の支配関係を考える。時点区間 $[n_1, n_2]$ での期待支払を $R_{n_1}^{n_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とし，密輸者の任意の戦略 $\boldsymbol{y}$ に対する期待支払を時点区間 $[1, i]$ と時点 i，及び時点区間 $[i+1, N]$ に分けると次式となる。

$$R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = R_1^{i-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \beta_1 y(i)(1-p_2)^{T_2(i)}(1-p_1)^{T_1(i)} + R_{i+1}^N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{3}$$

$$R(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = R_1^{i-1}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) - y(i)(1-p_2)^{T_2(i)}(1-p_1)^{T_1(i)} + R_{i+1}^N(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) \tag{4}$$

明らかに $R_1^{i-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = R_1^{i-1}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$ である。

$y(i) = 0$ である場合，両式の第 2 項はともにゼロであり，時点 $n \geq i+1$ における $T_2(n), T_1(n)$ は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ に対し共に一致するから，第 3 項も一致して $R_{i+1}^N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = R_{i+1}^N(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$ となる。したがって，$R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = R(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$ となる。$y(i) = 1$ である場合，時点 $n \geq i+1$ での $T_1(n)$ は，$\boldsymbol{x}$ の方が $\boldsymbol{x}'$ よりも 1 回多い。したがって，$R_{i+1}^N(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = R_{i+1}^N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(1-p_1)^{-1}$ となり，(3) 式から (4) を引くと次式を得る。

$$R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - R(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = (\beta_1 + 1)(1-p_2)^{T_2(i)}(1-p_1)^{T_1(i)} - \frac{p_1}{1-p_1} R_{i+1}^N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{5}$$

ここで全般的に，支払が最大になるのは拿捕が起こって α が生じる場合であるが，拿捕が起こるとゲームが終了することを考えると，一般的に $R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \alpha$ と言える。これを上記の時点 $i+1$ 以降について適用すれば，$R_{i+1}^N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \alpha(1-p_2)^{T_2(i)}(1-p_1)^{T_1(i)+1}$ となる。これを式 (5) に用いれば，

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - R(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) &\geq (\beta_1 + 1)(1-p_2)^{T_2(i)}(1-p_1)^{T_1(i)} - \frac{p_1}{1-p_1}\alpha(1-p_2)^{T_2(i)}(1-p_1)^{T_1(i)+1} \\ &= (\beta_1 + 1 - \alpha p_1)(1-p_2)^{T_2(i)}(1-p_1)^{T_1(i)} = (1-q_1)(1-p_2)^{T_2(i)}(1-p_1)^{T_1(i)} > 0 \end{aligned}$$

となる。つまり，戦略 $\boldsymbol{x}$ は，その中の 1 隻派出を取締未実施に変更した戦略 $\boldsymbol{x}'$ を弱く支配する。

(ii) 次に，取締者の任意の戦略 $\boldsymbol{x}$ の中のある時点 j における $x(j) = 2$ を $x(j) = 1$ に置き換えた戦略を $\boldsymbol{x}'$ とし，両戦略の支配関係を考える。

(i) のケースと同じく，$y(j)=0$ ならば $R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=R(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})$ となる。$y(j)=1$ の場合，時点 $n\geq j+1$ での $T_2(n)$ は戦略 $\boldsymbol{x}$ の方が $\boldsymbol{x}'$ より 1 回多く，$T_1(n)$ は 1 回少なくなる。したがって，

$$R_{j+1}^N(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})=R_{j+1}^N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(1-p_1)/(1-p_2)$$

となるから，(i) と同じように，時点区間 $[1,j-1],j,[j+1,N]$ で期待利得を分割すれば，

$$\begin{aligned}R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= R_1^{j-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\beta_2(1-p_2)^{T_2(j)}(1-p_1)^{T_1(j)}+R_{j+1}^N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\ R(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}) &= R_1^{j-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\beta_1(1-p_2)^{T_2(j)}(1-p_1)^{T_1(j)}+\frac{1-p_1}{1-p_2}R_{j+1}^N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

となる。両辺をひけば，

$$R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-R(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})=(\beta_2-\beta_1)(1-p_2)^{T_2(j)}(1-p_1)^{T_1(j)}-\frac{p_2-p_1}{1-p_2}R_{j+1}^N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

となり，(i) と同様に考えた式 $R_{j+1}^N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leq\alpha(1-p_2)^{T_2(j)+1}(1-p_1)^{T_1(j)}$ を上式に適用して，

$$\begin{aligned}&R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-R(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})\geq(\beta_2-\beta_1)(1-p_2)^{T_2(j)}(1-p_1)^{T_1(j)}-\frac{p_2-p_1}{1-p_2}\alpha(1-p_2)^{T_2(j)+1}(1-p_1)^{T_1(j)}\\ &\quad=\{\beta_2-\beta_1-\alpha(p_2-p_1)\}(1-p_2)^{T_2(j)}(1-p_1)^{T_1(j)}=(q_1-q_2)(1-p_2)^{T_2(j)}(1-p_1)^{T_1(j)}>0\end{aligned}$$

を得る。したがって，戦略 $\boldsymbol{x}$ は，その中の 2 隻派出を 1 隻派出に変更した戦略 $\boldsymbol{x}'$ を弱く支配する。

以上の (i), (ii) より，出動隻数を減少させた戦略は元の戦略に弱く支配され，結果として，延べ出動回数 M をすべて行使する取締戦略はそうでない戦略を弱く支配することが証明された。 $\square$

以上から，取締者の純粋戦略 $\boldsymbol{x}$ としては M 隻すべてを派出するものを，密輸者は L 回までの密輸決行を行う純粋戦略を羅列すればよいが，それぞれの総数は以下で評価できる。

$$\sum_{z=\max\{0,M-N\}}^{\lfloor M/2\rfloor}\frac{N!}{z!(M-2z)!(N-M+z)!},\qquad\sum_{z=0}^{L}\frac{N!}{z!(N-z)!}$$

4　動的計画法による均衡解の導出

3 節では問題の最適解を得る数値計算法を提示したものであるが，ゲームの解に対する一般的な性質を明らかにするためには多くの数値例を必要とする。ここでは，解析的な解の導出を可能とする動的計画法を提案し，簡単な例について解の性質について解析的な分析を行おう。

まず，密輸者の混合戦略に対する取締者の最適な純粋戦略を議論し，期待支払の最大化を行う。その後，密輸者の混合戦略を変化させ最大期待支払の最小化を行うことで，期待支払のミニマックス値，すなわちゲームの値を求める。

便宜上，最終日までの残り日数でステージ数を定義し，前節における密輸者の戦略 $\boldsymbol{y}$ をステージ数に対し定義し直して，$\boldsymbol{y} = (y_N, y_{N-1}, \ldots, y_1)$ で表現する。実行可能な戦略集合を $\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{y} \in \{0,1\}^N | \sum_{t=1}^{N} y_t \leq L\}$ で，ステージ t で密輸決行を行う戦略集合を $\boldsymbol{Z}_t = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y} | y_t = 1\}$ で表す。また，戦略 $\boldsymbol{y}$ をとる確率を $\pi(\boldsymbol{y})$ とする混合戦略 $\pi = \{\pi(\boldsymbol{y}) | \sum_{y \in Y} \pi(\boldsymbol{y}) = 1,\ \pi(\boldsymbol{y}) \geq 0\}$ を考える。この混合戦略によりステージ t で密輸が決行される確率は $\sum_{y \in Z_t} \pi(\boldsymbol{y})$ である。

いまステージ t において密輸者の混合戦略が π と予想されており，派出可能な残り艇数が延べ m 隻ある状況において，以後最適なパトロール戦略によって得られる期待利得の最大値を $f_t^m(\pi)$ と表しておく。また，同じ状況下でのステージ t で 2 隻派出し以後最適な取締戦略により得られる最大期待利得を $d_t^m(\pi)$，1 隻派出による最大期待利得を $g_t^m(\pi)$，さらにはパトロール未実施による最大期待利得を $h_t^m(\pi)$ とすると，連続したステージ t と $t-1$ における最適性から次の関係式が成立する。

$$d_t^m(\pi) = \beta_2 \sum_{y \in Z_t} \pi(\boldsymbol{y}) + \left(1 - p_2 \sum_{y \in Z_t} \pi(\boldsymbol{y})\right) f_{t-1}^{m-2}(\Lambda_t^2 \pi) \tag{6}$$

$$g_t^m(\pi) = \beta_1 \sum_{y \in Z_t} \pi(\boldsymbol{y}) + \left(1 - p_1 \sum_{y \in Z_t} \pi(\boldsymbol{y})\right) f_{t-1}^{m-1}(\Lambda_t^1 \pi) \tag{7}$$

$$h_t^m(\pi) = -\sum_{y \in Z_t} \pi(\boldsymbol{y}) + f_{t-1}^{m}(\pi) \tag{8}$$

それぞれの式の第 1 項はステージ t で生じる期待支払であり，第 2 項はステージ t で拿捕が起こらずゲームがステージ $t-1$ に進んだ以降の最大期待支払であるが，取締者の現在の戦略を加味して更新した混合戦略 π の予想が含まれている。すなわち，$\Lambda_t^2 \pi$ は，ステージ t で 2 隻派出したにも拘わらず拿捕が起こらなかったという条件付きでの π の事後確率であり，

$$\Lambda_t^2 \pi(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \pi(\boldsymbol{y})(1-p_2)/(1-p_2 \sum_{z \in Z_t} \pi(\boldsymbol{z})), & y_t = 1 \text{ のとき} \\ \pi(\boldsymbol{y})/(1-p_2 \sum_{z \in Z_t} \pi(\boldsymbol{z})), & y_t = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

により評価できるが，$y_t = 1, 0$ のどちらでも成り立つ次式により統一して表すことができる。

$$\Lambda_t^2 \pi(\boldsymbol{y}) = \frac{\pi(\boldsymbol{y})(1 - p_2 y_t)}{1 - p_2 \sum_{z \in Z_t} \pi(\boldsymbol{z})} \tag{9}$$

同様に，ステージ t での 1 隻派出に対し拿捕が起こらなかったという条件付きでの π の事後確率である $\Lambda_t^1\pi$ は，次式で評価できる。

$$\Lambda_t^1\pi(\boldsymbol{y}) = \frac{\pi(\boldsymbol{y})(1-p_1y_t)}{1-p_1\sum_{z\in Z_t}\pi(\boldsymbol{z})} \tag{10}$$

以上の記号を用いれば，ステージ t での取締者の最適な純粋戦略とそれによる最大期待支払 $f_t^m(\pi)$ は次の漸化式をもつ。

$$m \geq 2 \text{ ならば，} f_t^m(\pi) = \max\{d_t^m(\pi),\ g_t^m(\pi),\ h_t^m(\pi)\}, \tag{11}$$

$$m = 1 \text{ ならば，} f_t^m(\pi) = \max\{g_t^m(\pi),\ h_t^m(\pi)\}, \tag{12}$$

$$\text{初期条件：} f_0^m(\pi) = 0, \tag{13}$$

$$\text{境界条件：} f_t^0(\pi) = -\sum_{i=1}^{t}\sum_{y\in Z_t}\pi(\boldsymbol{y}), \tag{14}$$

$$f_1^1(\pi) = \beta_1\sum_{y\in Z_1}\pi(\boldsymbol{y}), \tag{15}$$

$$f_t^{2t}(\pi) = \sum_{y\in Y}\pi(\boldsymbol{y})\sum_{i=1}^{t}y_i\beta_2(1-p_2)^{\sum_{j=i+1}^{t}y_j} \tag{16}$$

条件 (14) は，パトロールが決して実施されなければすべての密輸が成功裡に終わることを，条件 (16) は，取締者が毎日 2 隻のボートを出す余裕がある場合であり，ゲームを解かなくてもその値は計算できる。(11) 式または (12) 式による最適値 $f_t^m(\pi)$ が右辺の $d_t^m(\pi)$, $g_t^m(\pi)$ あるいは $h_t^m(\pi)$ のいずれにより与えられるかに対応して，ステージ t における最適な取締戦略が「2 隻派出」,「1 隻派出」あるいは「パトロール未実施」となる。初期条件 (13) から漸化式 (11) または (12) を用いて，$m = 0, 1, \ldots, \min\{2t, M\}$, $t = 1, 2, \ldots, N$ と逐次的に計算すれば，初日のステージ N における密輸者の混合戦略 π に対し，最大期待利得 $f_N^M(\pi)$ を与える取締者の最適純粋戦略 $\boldsymbol{x}^*$ が得られる。π の実行可能領域は $|\boldsymbol{Y}|-1$ 次元の単位単体となるから，この領域の中で $f_N^M(\pi)$ を最小にする π^* を求めれば，それが密輸者のミニマックス戦略となり，そのときの値 $f_N^M(\pi^*)$ がミニマックス値，すなわちゲームの値となる。

以上の動的計画法による解法を $N = 2,\ M = 2,\ L = 1$ の具体例に適用し，解の解析的な分析を行おう。$L = 1$ であるから密輸者の純粋戦略には $\boldsymbol{y}^1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{y}^2 = (0, 1)$ 及び $\boldsymbol{y}^3 = (0, 0)$ の 3 つがあり，戦略 $\boldsymbol{y}^1$, $\boldsymbol{y}^2$ をとる確率をそれぞれ π_1, π_2 とすると，$\boldsymbol{y}^3$ のそれは $1-\pi_1-\pi_2$ となる。以上の準備の下，$f_1^m(\pi)$ の計算を経て $f_2^2(\pi)$ を求めることになるが，途中の詳細な計算は付録に譲ることにして結果だけを示すと，以下のようになる。ただし，式中の x_2^*, x_1^* はステージ 2 及び 1 における最適な取締戦略を示す。

(i) $\beta_2 < 2\beta_1 + 1$ の場合：

$$f_2^2(\pi) = \begin{cases} d_2^2(\pi) = \beta_2\pi_1 - \pi_2, & \pi_2 < \frac{\beta_2-\beta_1}{\beta_1+1}\pi_1 \text{ かつ } \pi_2 < \pi_1 \text{ のとき (領域①: } x_2^* = 2,\ x_1^* = 0) \\ g_2^2(\pi) = \beta_1(\pi_1 + \pi_2), & \frac{\beta_2-\beta_1}{\beta_1+1}\pi_1 \leq \pi_2 < \frac{\beta_1+1}{\beta_2-\beta_1}\pi_1 \text{ のとき (領域③: } x_2^* = 1,\ x_1^* = 1) \\ h_2^2(\pi) = -\pi_1 + \beta_2\pi_2, & \pi_1 \leq \pi_2 \text{ かつ } \frac{\beta_1+1}{\beta_2-\beta_1}\pi_1 \leq \pi_2 \text{ のとき (領域②: } x_2^* = 0,\ x_1^* = 2) \end{cases} \tag{17}$$

(ii) $\beta_2 \geq 2\beta_1 + 1$ の場合：

$$f_2^2(\pi) = \begin{cases} d_2^2(\pi) = \beta_2\pi_1 - \pi_2, & \pi_2 < \pi_1 \text{ のとき (領域①: } x_2^* = 2,\ x_1^* = 0) \\ h_2^2(\pi) = -\pi_1 + \beta_2\pi_2, & \pi_2 \geq \pi_1 \text{ のとき (領域②: } x_2^* = 0,\ x_1^* = 2) \end{cases} \tag{18}$$

(i) のケースにおいて取締者の最適戦略が変化する３つの領域を図１に示しているが，その領域番号は (17) 式中にも記入している。(ii) のケースは図２に示した。各ケースの条件から，２隻派出の場合の期待利得 β_2 が大きな (ii) のケースでは２隻の集中使用がよく，そうでない (i) のケースでは，π_1 と π_2 が比較的等しく，最初に密輸を行う戦略 $\boldsymbol{y}^1$ と２日目に行う戦略 $\boldsymbol{y}^2$ を密輸者が同じように取りうると予想される場合には，両日ともに１隻ずつを派出することが最適となる。以上の評価式では，具体的なパラメータを設定せずに，取締者の最適戦略が変化する一般的な条件が見いだされている。

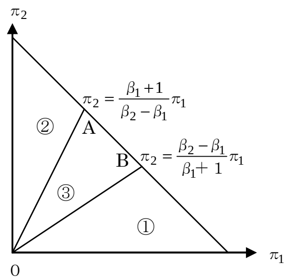

図１：最適取締者戦略の区分
（$\beta_2 < 2\beta_1 + 1$ の場合）

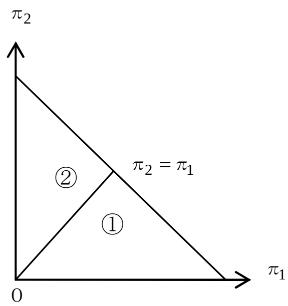

図２：最適取締者戦略の区分
（$\beta_2 \geq 2\beta_1 + 1$ の場合）

密輸者の最適な戦略とゲームの値は，図１あるいは図２において，$\min_\pi f_2^2(\pi)$ なる点 π^* を求めることが必要である。例えば，$\alpha = 2,\ p_1 = 0.3,\ q_1 = 0.7,\ p_2 = 0.5,\ q_2 = 0.3$ の設定はケース (i) に相当する。図１の $\pi_1 - \pi_2$ 平面上に (17) 式の $f_2^2(\pi)$ を z 座標に描いたものが図３であり，図１の線分 AB 上で最小となる。すなわち，$\pi_1 + \pi_2 = 1,\ 8/17 \leq \pi_1 \leq 9/17$ を満たす混合戦略 π が密輸者の最適戦略であり，ゲームの値は -0.1 となる。この場合でも，数値解法アルゴリズムでは不可能な密輸者の最適戦略の全体を見渡すことができる。

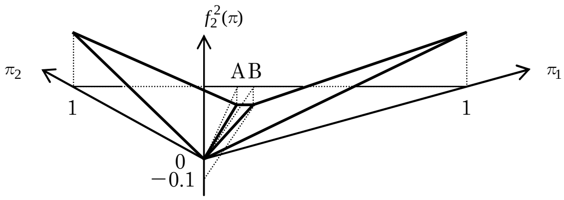

図３: 密輸者の混合戦略 π に対する最大期待支払

5　数値例

ここでは，３節で提案した行列ゲームによる数値解法により，$N = 7,\ M = 4,\ L = 4$ の取締ゲームについて，各プレイヤーの最適戦略を求めた。プレイヤーの最適混合戦略については，取締者，密輸者それぞれの純粋戦略 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$ に対する最適な選択確率として得られるが，その混合戦略の性質を見るために次のような処理を行った。密輸者の最適混合戦略 π^* から，ステージ t で密輸を決行する確率は $\sum_{y \in Z_t} \pi^*(\boldsymbol{y})$ で計算できる。また，全期間中での密輸予定回数の期待値は $\sum_{y \in Y} \pi^*(\boldsymbol{y}) \sum_{t=1}^{N} y_t$ により得られる。取締者に関しては，その最適混合戦略から各時点における取締艇２隻でのパトロール実施確率及び１隻でのパトロール実施確率をそれぞれ求めた。

図４は，$\alpha = 3,\ p_1 = 0.3,\ q_1 = 0.4,\ p_2 = 0.5,\ q_2 = 0.1$ について，各時点におけるパトロール実施確率，密輸決行確率を描いたものである。この場合の最適パトロール戦略では，混合戦略で使用する純粋戦略には２隻使用は含まれておらず，各１隻を４日に割り当てる純粋戦略ばかりを使用する。結果として，７日間にわたりパトロール実施確率は 4/7 の等確率となった。このケースでは，一度に２隻派出は控え，１隻ずつの派出で長期間をカバーして密輸者摘発の機会を多く確保する方が有効となる。一方，密輸者は許容回数４回の密輸をすべて決行する純粋戦略のみを取ることが最適となるが，これは取締側の１隻派出とその拿捕確率 $p_1 = 0.3$ が比較的小さいことを考慮しての選択である。ただし，早い段階で拿捕されれば密輸回数を残したままゲームが終了することとなるから，密輸決行確率を時間の経過とともに次第に大きくするように調整している。このときのゲームの値は，-0.35 となる。

次に，他のパラメータは固定し，２隻による拿捕確率のみ $p_2 = 0.65$ と変えて描いたものが図５である。取締者は２隻使用のパトロール実施も採用するようになる。これに伴い

密輸決行は控えられるようになり，決行回数の期待値は 2.9 回に減少するが，密輸決行確率を時間とともに増加させる傾向は変わらない。因みにゲームの値は -0.28 と，当然前のケースよりは大きくなる。

最後に $p_2 = 0.7$ としたものが図６である。このときの取締者は２隻ずつを２日に割り当てるパトロール実施戦略のみを採用し，各時点で２隻によるパトロール実施確率を 2/7 とする。パトロールの実施される日数は高々２日であるものの，パトロールに遭遇した場合の摘発確率は大きいため，密輸者は２回の密輸決行をもつ純粋戦略のみを採用し，４回の許容回数のうち２回の密輸機会を放棄する。この場合のゲームの値は -0.19 となり，上２つのケースよりさらに増加する。

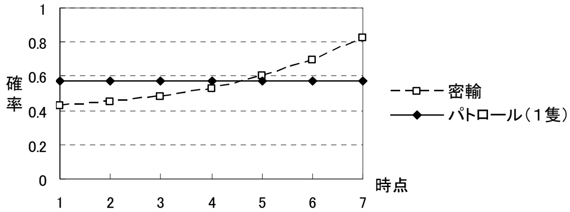

図４: 各時点でのパトロール及び密輸実施確率（ $p_2 = 0.5$ の場合）

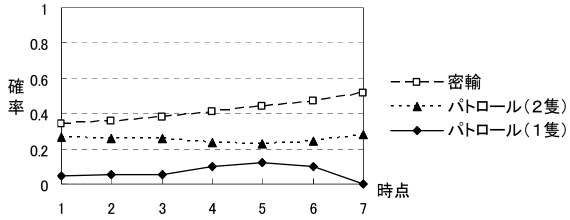

図５: 各時点でのパトロール及び密輸実施確率（ $p_2 = 0.65$ の場合）

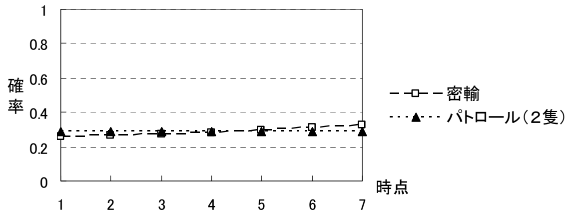

図６: 各時点でのパトロール及び密輸実施確率（ $p_2 = 0.7$ の場合）

6　おわりに

この論文では，プレイヤーの情報が取得できな場合の密輸取締ゲームについて議論した。取締者及び密輸者ともに，予算や何らかの経済的理由により，その派出パトロールボート隻数や密輸決行数に制限があり，その中での最適な戦略が何かを分析対象とした。大きなサイズの問題に対しては，通常の行列ゲームによる数値解法を提示したが，同時に動的計画法を用いた解法も提案した。動的計画法を用いたゲームの解法は過去の研究であまり見られておらず新規性がある。ただし，その適用は小さなサイズの問題に限定されるものの，プレイヤーの最適戦略に対する包括的で解析的な分析が可能であり，論文ではその例も示した。

取締者が 1 回で使用可能なパトロールボート隻数を最大 2 隻としたこのモデルは，密輸行為に対する取締予算を集中的に使用するべきか，長期間にわたる監視予算として使用すべきかといった広い意味での効率的な取締法の議論に使うことができる。また，1 隻，2 隻のパトロールによる拿捕確率や密輸成功確率を定数として使用したが，気象，海象等を含め，取締時期により変化させることも可能である。運用するボートの性能ごとに拿捕確率が変わるモデルにも容易に拡張でき，現実的な状況下での取締にこのモデルを応用するための工夫が様々考えられる。

付録： $N=2,\ M=2,\ L=1$ に対する最大期待利得 $f_2^2(\pi)$ の導出

このケースにおける密輸者の純粋戦略には，初日（ステージ 2 ）に密輸をするか，2 日目（ステージ 1 ）で密輸を行うか，それとも全く密輸を実施しないかを表す $\boldsymbol{y}^1=(1,0)$, $\boldsymbol{y}^2=(0,1)$ 及び $\boldsymbol{y}^3=(0,0)$ の 3 つがある。戦略 $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2$ をとる確率をそれぞれ π_1, π_2 とし，戦略 $\boldsymbol{y}^3$ を選択する確率を $1-\pi_1-\pi_2$ とする。このとき，$\sum_{y\in Z_1}\pi(\boldsymbol{y})=\pi_2$，$\sum_{y\in Z_2}\pi(\boldsymbol{y})=\pi_1$ であることを確認しておく。

まず，(14)~(16) 式から，ステージ $t=1$ における最適値 $f_t^m(\pi)$ を求めると次式となる。

$$f_1^0(\pi) = -\sum_{y\in Z_1}\pi(\boldsymbol{y}) = -\pi_2 \tag{A1}$$

$$f_1^1(\pi) = \beta_1\sum_{y\in Z_1}\pi(\boldsymbol{y}) = \beta_1\pi_2 \tag{A2}$$

$$f_1^2(\pi) = \sum_{y\in Y}\pi(\boldsymbol{y})y_1\beta_2 = \beta_2\pi_2 \tag{A3}$$

次にステージ $t=2$ における $d_2^2,\ g_2^2,\ h_2^2$ を求めてゆこう。(6) 式から，

$$d_2^2(\pi) = \beta_2\pi_1 + (1-p_2\pi_1)f_1^0(\Lambda_2^2\pi)$$

である。(9) 式の $\Lambda_2^2\pi(\boldsymbol{y}) = \pi(\boldsymbol{y})(1-p_2y_2)/(1-p_2\pi_1)$ を (A1) 式に代入した式

$$f_1^0(\Lambda_2^2\pi) = -(\Lambda_2^2\pi)_2 = -\frac{\pi_2}{1-p_2\pi_1}$$

を使えば $d_2^2(\pi) = \beta_2\pi_1 - \pi_2$ を得る。$g_2^2(\pi)$ は，(7) 式より

$$g_2^2(\pi) = \beta_1\pi_1 + (1-p_1\pi_1)f_1^1(\Lambda_2^1\pi)$$

であるが，(10) 式の $\Lambda_2^1\pi(\boldsymbol{y}) = \pi(\boldsymbol{y})(1-p_1y_2)/(1-p_1\pi_1)$ を (A2) 式に代入した式

$$f_1^1(\Lambda_2^1\pi) = \beta_1(\Lambda_2^1\pi)_2 = \frac{\beta_1\pi_2}{1-p_1\pi_1}$$

を使えば，$g_2^2(\pi) = \beta_1(\pi_1+\pi_2)$ となる。$h_2^2(\pi)$ は，式 (8) 及び (A3) より $h_2^2(\pi) = -\pi_1+\beta_2\pi_2$ となる。

以上の $d_2^2(\pi)$，$g_2^2(\pi)$，$h_2^2(\pi)$ の大小関係を考える。$d_2^2(\pi) > g_2^2(\pi)$ は，その変形から，$\pi_2 < (\beta_2-\beta_1)\pi_1/(\beta_1+1)$ と同値である。また，$d_2^2(\pi) > h_2^2(\pi)$ は $\pi_2 < \pi_1$ と同じであるし，$g_2^2(\pi) > h_2^2(\pi)$ は $\pi_2 < (\beta_1+1)\pi_1/(\beta_2-\beta_1)$ と同値である。大小関係と同値な上の３つの条件式を用いて，その最も大きな値で与えられる $f_2^2(\pi)$ を求めることができるが，$\beta_2 \geq 2\beta_1+1$ の場合には，条件 $(\beta_2-\beta_1)\pi_1/(\beta_1+1) < (\beta_1+1)\pi_1/(\beta_2-\beta_1)$ が成立しないことに注意すると，$\beta_2 < 2\beta_1+1$ が成立する場合には本文の (17) 式によって，$\beta_2 \geq 2\beta_1+1$ の場合には (18) 式によって，最適値 $f_2^2(\pi)$ が与えられることが証明できる。

参考文献

[1] R. Avenhaus and M.J. Canty (2005), Playing for Time: A Sequential Inspection Game, *European J. of Operational Research*, **167**, pp.475-492.
[2] R. Avenhaus, M.J. Canty, D.M. Kilgour and B. von Stengel (1996), Inspection Games in Arms Control, *European J. of Operational Research*, **90**, pp.383-394.
[3] R. Avenhaus and D. Kilgour (2004), Efficient Distributions of Arm-Control Inspection Effort, *Naval Research Losigtics*, **51**, pp.1-27.
[4] V. Baston and F. Bostock (1991), A Generalized Inspection Game, *Naval Research Logistics*, **38**, pp.171-182.
[5] M. Canty, D. Rothenstein and R. Avenhaus (2001), A Sequential Attribute Sampling Inspection Game for Item Facilities, *Naval Research Losigtics*, **48**, pp.476-505.
[6] M. Dresher (1962), A Sampling Inspection Problem in Arms Control Agreements: A Game-Theoretic Analysis, Memorandum RM-2972-ARPA, The RAND Corporation, Santa Monica, California.
[7] T. Ferguson and C. Melolidakis (1998), On the Inspection Game, *Naval Research Logistics*, **45**, pp.327-334.
[8] A. Garnaev (1994), A Remark on the Customs and Smuggler Game, *Naval Research Logistics*, **41**, pp.287-293.
[9] R. Hohzaki, D. Kudoh and T. Komiya (2006), An Inspection Game: Taking Account of Fulfillment Probabilities of Players' Aims, *Naval Research Logistics*, **53**(8), pp.761-771.

[10] R. Hohzaki (2006), A Compulsory Smuggling Model of Inspection Game Taking Account of Fulfillment Probability of Players's Aims, *J. of the Operations Research Society of Japan*, **49**(4), pp.306-318.

[11] R. Hohzaki (2007), An Inspection Game with Multiple Inspectees, *European J. of Operational Research*, **178**(3), pp.894-906.

[12] R. Hohzaki (2011), An Inspection Game with Smuggler's Decision on the Amount of Contraband. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **54**, pp.25–45.

[13] R. Hohzaki and H. Maehara (2010), A Single-Shot Game of Multi-Period Inspection, *European J. of Operational Research*, **207**(3), pp.1410-1418.

[14] M. Maschler (1966), A Price Leadership Method for Solving the Inspection's Non-Constant-Sum Game, *Naval Research Logistics Quarterly*, **13**, pp.11-33.

[15] M. Sakaguchi (1994), A Sequential Game of Multi-Opportunity Infiltration, *Mathematica Janonica*, **39**, pp.157-166.

[16] M. Thomas and Y. Nisgav (1976), An Infiltration Game with Time Dependent Payoff, *Naval Research Logistics Quarterly*, **23**, pp.297-302.