生駒経済論叢　第11巻第1号　2013年7月

下級財を含む場合の乗法分離型効用関数の特性と効用の変化率

藤　本　正　樹

概要　本稿は二財のうち一方が下級財となる場合の乗法分離型効用関数の特性を研究している。この場合には，下級財から得られる効用の変化率が消費量の増加とともに逓減し上級財から得られる効用の変化率が消費量の増加とともに逓増することが示される。さらに，効用の変化率の変化と限界代替率の変化の関係，それと無差別曲線の形状の関係，それと限界代替率逓減の条件の関係を調べている。その後に，上記の結果を利用して下級財を含む場合の効用関数の例を三つ示している。一番目は，上級財の効用が凸関数と指数関数を使って表されている例である。二番目は，古典的な Wold and Jureen（1953）の例を特殊ケースとして含む上級財の効用が一次関数（単調減少）の負のべき乗によって表されている例である。三番目は，上級財の効用が二次関数（単調減少）の負のべき乗によって表されている例である。

キーワード　上級財，下級財，乗法分離型効用関数，効用の変化率の変化，ギッフェン財
原稿受理日　2013年5月8日

1.　序

下級財とは，消費者の所得（あるいは予算）が増加するのにつれてその消費量が減少するような財である。消費者による予算制約下での効用最大化行動を考えたときにどのような財が下級財になるのかの判断は，スルツキー方程式の所得効果の符号を使うのが一般的である(1)。藤本（2009）は，二財のうち一方が下級財となる場合としてあり得るケースを所得効果の符号を使い消去法によってリストアップした(2)。その第一には，加法分離型効用関数で下級財の効用が凹関数，上級財の効用が凸関数で表されているケースがある。このケースは現れる関数の性質が扱いやすく，またその性質を持つ関数が数多いため，古くから多くの関数例が提示されてきた。例えば，Liebhafsky（1969）は下級財の効用関数が対数関数で上級財の効用関数が下に凸な二次関数の例で上級財・下級財の場合を扱っている。また Silberberg and Walker（1984）は，Liebhafsky（1969）の効用関数にマイナス下級財の消費量の一次の項を付け加えて同様の場合を扱っている(3)。また三土（1992）では，相対的リスク回避度一定の効用関数の一次結合となる加法分離型関数に対して，縦線が先すぼまりになって左上へと密集するような変数変換を行うことで一方が下級財となる効用関数を構成している。さらに Spiegel（1994，1997）は，下級財の効用関数として上に凸な二次関数で最大値以降一定値を取るものを，そして上級財の効用関数として下に凸な二次関数を使っている(4)。

リストの第二のグループには，効用関数の交差偏導関数が負となるケースがある。このケースでは下級財の効用が凹関数で表されることに特徴があり，上級財の効用は凹，線型，凸関数のどれでも良い。このケースの関数例としては，まず Vandermeulen（1972）の二変数のべき乗の積（下級財の消費量について減少で上級財の消費量については凸）マイナス下級財の消費量の負のべき乗となる関数がある。それ以外には，二変数の和のべき乗

(1)　財が下級財，あるいは上級財となるためのスルツキー方程式による十分条件については，上級のミクロ経済学のテキスト，例えば，西村（1990）や Varian（1991）などを参照のこと。

(2)　本稿での第一グループが藤本（2009）でのケース６，第二グループが３，４，５に，第三グループがケース１，２，７に当たっている。

(3)　このような項の追加が行われるのは，そのことによって興味深い特殊ケースであるギッフェン財の場合が扱えるからである。この結果は Vandermeulen（1972）による幾何学的必要十分条件（p.454 の(1)式）を満たすような財空間の部分集合が非空集合となるのかどうかを調べることで確認できる。

(4)　鵜沢（2007）は，コンピュータソフトの MATHEMATICA を使って，これらの例とさらに最近出された例を含む多くの効用関数について３次元グラフと等高線を描き，それらのグラフの特徴を論じている。

マイナス下級財の消費量のべき乗となる，一方の生産要素が下級財となる Epstein and Spiegel（2000）の生産関数を効用関数として使った Weber（2001）の議論や，Doi, Iwasa, Shimomura（2009）（以下 Doi et al.（2009））による下級財と上級財の消費量の対数関数の和マイナス両財の消費量の積となる関数が知られている。これらの例での効用関数は，下級財の消費量についても上級財の消費量についても凹関数となっている。

第三のグループには，乗法分離型のケースを含む効用関数の交差偏導関数が正となるケースがある。このケースでは上級財の効用が凸関数で表されることに特徴があり，下級財の効用関数の方は凹，線型，凸関数のどれでも良い。このケースの研究は加法分離型のケースほど盛んではなく，Liebhafsky（1969）は交差偏導関数が正となる場合のスルツキーの安定性条件を使った分析がさらなる興味深い研究テーマとなるとしながらも，そのための関数として加法分離型関数を二乗（つまり単調増加変換）したものを勧めるなど，加法分離型のケースの延長線上にあるケースと捕らえられているようである。具体的な関数例も，Wold and Jureen（1953）による乗法分離型の例が知られている程度である。

本稿では乗法分離的な関数のケースを対象として効用関数の性質を理論的に研究する。乗法分離型効用関数を対象とする場合のメリットは，消費者の効用を通じた財の相互連関を考慮できるということだけではなく，技術的にも効用の「単調増加性」や「強い意味での準凹性」などの基本的な条件によって関数の定義域が制限されにくいということがある。この点に関しては Liebhafsky（1969）の言うように加法分離型関数の二乗を使っては上手くいかない(5)。（以下，下級財の消費量を横軸に上級財の消費量を縦軸にとることとする。）例えば，Liebhafsky（1969）の加法分離型効用関数の例では「限界代替率の逓減」のために上級財の消費量が一定値より大きくならなければならない。また Silberberg and Walker（1984）の加法分離型の例では，「限界代替率の逓減」のためにある右下がりの直線の右上側に定義域が制限され，また「下級財の限界効用が正」となるためにその消費量が一定以下のときだけに制限されている。そして Spiegel（1994，1997）の加法分離型の例でも定義域に同様の制限が現れるので，下級財の限界効用がゼロとなる消費量以上では下級財の効用は定数とされている。交差偏導関数が負の場合でも，Vandermeulen（1972）の例では「限界代替率の逓減」のためにある右下がりの曲線によって左下側から，また「下級財の限界効用が正」であるために別の右下がりの曲線によって右上側から定義域が制限されている。また，Weber（2001）の例では「下級財の限界効用が正」となるた

(5) このことの証明は巻末の付録で行う。ここではまず限界代替率が序数的効用の概念であることに注意されたい。

めにある右下がりの曲線によって右側から定義域が制限されている。同様に Doi et al.（2009）の例でも「下級財の限界効用が正」となる領域はある右下がりの曲線の左下側だけであり，その右上側では下級財の限界効用がゼロとなる関数がスムーズに接続されている。これらの制限の内で Vandermeulen（1972），Silberberg and Walker（1984），Spiegel（1994,1997），Doi et al.（2009）に見られる「その上で下級財の限界効用がゼロとなる（無差別曲線が水平となる）右下がりの曲線（あるいは垂直線）」による制限は，Vandermeulen（1972, p.457）によって「効用の飽和」と呼ばれており，ギッフェン財の場合の必要条件だとされている（しかし3.1節の（例3.1）によれば，この種の制限は必ずしも必要ではない）。そして，「限界代替率の逓減」による左下からの制限は関数形によるものである。それらに対して，乗法分離型の場合には Wold and Jureen（1953）の例を特殊ケースとして含むクラスの関数を考えれば，パラメータの値を適切に決めることで定義域は右上側や左下側からの制限は受けない（ただし，彼らのオリジナルはギッフェン財を考えているため，ギッフェン財の消費量が正でありそのときの効用が正かつ有限となるために定義域が左側と上側から制限されている）。

本稿では，下級財を含む場合の乗法分離型効用関数の性質とその経済学的インプリケーション，さらにそれを構成する関数の性質と見つけ方を明らかにする。そのときに中心となる概念が「効用の変化率の変化」である。これを使えば，下級財を含む場合とは上級財の効用の変化率が逓増し下級財の効用の変化率が逓減しているときであると言うことができる。この概念が現れてくるのは以下の理由による。一般に，上級財と下級財の関係は二財の限界代替率がそれぞれの消費量の変化によってどのように変化するのかというところに現れてくるのである（補論を参照されたい）。その結果として乗法分離型の場合では，限界代替率の分母・分子に現れる効用の変化率の変化によって上級財と下級財の関係が特徴づけられるのである。以上の結果は，第一グループである加法分離型の場合に限界効用の変化（効用関数の二階微分）が果たしているのと同じ役割を，乗法分離型の場合には効用の変化率の変化が果たしているのだと理解することができる。さらに，限界代替率の変化の仕方を通じて，効用の変化率の変化の仕方が持つ経済学的意味も分かり，下級財がある場合の無差別曲線の形状に見られる特徴についても分かるのである。

さらに，効用の変化率の変化と限界効用の変化の関係を考察すると，効用の変化率の逓増（逓減）は限界効用の逓増（逓減）よりもかなり制約的な（緩い）条件であることが分かる。このことの含意は以下の三つである。第一に，乗法分離型のときの下級財は加法分離型のときよりも非常にありにくいのだということが分かる。第二に，先ほどの分類での

第三グループの結果をより正確に言い直すことができる。正確には，乗法分離型効用関数の場合の下級財の効用関数は凹，線型または変化率が逓減する凸関数であり，上級財の効用関数は変化率が逓増する凸関数である。第三に，限界効用が逓増していても変化率が逓減することもあり得るので，グラフの形状を見ただけでは変化率の変化は判別が困難なのだということである。この点に関しては，本稿ではグラフを使った効用の変化率の変化の簡単な判別法を示している（2.2節）。

本稿の構成は以下のとおりである。第 2 節では最初に，上級財と下級財の判別のために効用の変化率の変化という概念を導入し（2.1節），それと限界代替率の変化との関係，無差別曲線の形状との関係（2.2節），さらに限界代替率逓減の条件との関係（2.3節）を示している。次いで2.4節では，変化率の変化の仕方と関数の性質の関係を調べている。そこでの結果を使って，第 3 節ではさまざまな関数の性質をチェックし，下級財を含む場合の効用関数の例を三つ示している。一番目は，上級財の効用が凸関数と指数関数を使って表されている例である（例3.1）。この場合には，限界代替率逓減のために定義域が下側から制限されるが，一定の条件の下でギッフェン財の場合も扱える。二番目は，古典的な Wold and Jureen（1953）の例を特殊ケースとして含む上級財の効用関数を一次関数（単調減少）の負のべき乗とする例である（例3.3−1）。このクラスの関数は藤本（2009）でも検討したのだが，最も良い性質を持つ扱いやすい関数例である。三番目は，上級財の効用関数を二次関数（単調減少）の負のべき乗とするバリエーションである（例3.3−2）。この場合は限界代替率の逓減によって定義域が下側から制限されることとなる。第 4 節は，本稿で明らかにした変化率が逓増・逓減する関数の性質を，変化率が逓増する関数を見つける手続きを通じて体系化している。最後に補論では，上級財，下級財とギッフェン財の区別と限界代替率の変化の関係についての一般論を展開している。

2.　上級財，下級財と乗法分離型効用関数の性質

2.1　上級財・下級財の区別と財の効用の変化率

ここでは，乗法分離型効用関数として

$$U = I(x_i)S(x_s)$$

を考える。ここで，記号 x_i は下級財（財 i と呼ぶ）の消費量，x_s は上級財（財 s と呼ぶ）

の消費量を表す。同様に，関数 I は下級財から得られる効用を，関数 S は上級財からの効用を表す。すると，各財の消費量による偏微分は：

$$U_i = I'(x_i)S(x_s),\ U_{ii} = I''(x_i)S(x_s),\ U_{is} = I'(x_i)S'(x_s) = U_{si}$$
$$U_s = I(x_i)S'(x_s),\ U_{ss} = I(x_i)S''(x_s)$$

となる。ここで，記号は通常どおり $U_i = \partial U/\partial x_i$ などであり，下付の文字はどの財の消費量で微分しているかを表している。これらの偏微分については，各財の効用が正であることと限界効用が正であることを基本的な前提とする。

基本的前提：各財の消費量が正である場合には，効用は正 $I(x_i) > 0$，$S(x_s) > 0$ であり，かつ限界効用も正 $I'(x_i) > 0$，$S'(x_s) > 0$，であるとする。

まず，財 i の財 s で測った限界代替率が逓減しているとする（限界代替率逓減の条件については2.3節で改めて検討する）：

$$（条件Ａ）\quad \frac{d}{dx_i}MRS_{is}(x_i,\ x_s) = -\frac{d}{dx_i}\left(\left.\frac{dx_s}{dx_i}\right|_{U=const.}\right) < 0$$

このとき，財 i が下級財であるための十分条件は，その所得効果の符号が負となることより[(6)]，

$$（条件Ｂ）\quad U_sU_{is} - U_iU_{ss} = I(x_i)I'(x_i)\left[(S'(x_s))^2 - S(x_s)S''(x_s)\right] < 0$$

が満たされている。上記の基本的前提より，ここでの場合には上級財 s からの効用 S の方が条件：

$$0 < \frac{S'(x_s)}{S(x_s)} < \frac{S''(x_s)}{S'(x_s)} \tag{1}$$

を満たす。また，財 s が上級財となるための十分条件は，その所得効果が正となることより

(6)　この条件については，例えば，西村（1990）の第３章の3.5補論や Varian（1991）の8.4節などを参照されたい。

（条件C）　$U_i U_{si} - U_s U_{ii} = S(x_s)S'(x_s)\Big[(I'(x_i))^2 - I(x_i)I''(x_i)\Big] > 0$

を満たす。よって，基本的前提の下では下級財 i からの効用 I の方が条件：

$$\frac{I'(x_i)}{I(x_i)} > \frac{I''(x_i)}{I'(x_i)} \tag{2}$$

を満たす。これらの条件式(1)と(2)より，一方の財の消費者にとっての特性はそれ自体からの効用ではなく他方の財からの効用の性質によって決まってくることが分かる。この結果は加法分離型のケースで良く知られた結果と同様である。

本稿では，上級財の十分条件(1)が満たされるような場合を「効用の変化率が逓増するケース」と，そして下級財の十分条件(2)が満たされる場合を「効用の変化率が逓減するケース」と呼ぶ。

ここで，本稿全体での関数記号の使い分けについての決め事をしておく。以下では，「効用」，「上級財」や「下級財」など，対象の経済学的な意味を含めて議論する場合には，関数記号 U，I や S などを用いる。それに対して，特に経済学的な意味を含まない関数の性質を議論する場合には，関数記号 F や G などを使うことにする[7]。

2.2　効用の変化率の変化：幾何学的特徴と経済学的インプリケーション

ここからは，効用の変化率の変化の仕方と関数の性質の関係を明らかにしていく。まずは，その呼び方の由来となる，商の微分の符号と分母・分子の変化率の大小関係による以下の結果を示しておく。

命題1.　関数 $F: S \to R$（任意の $x \in X$ に対して $F(x) > 0$ かつ $F'(x) > 0$）が条件式：

$$\frac{F'(x)}{F(x)} < \frac{F''(x)}{F'(x)}$$

を満たす必要十分条件は，その変化率 $F'(x)/F(x)$ が x の増加とともに増加する（逓増する）ことである。

(7)　前者の例としては，2.2節の（図例）や（経済学的インプリケーション），2.3節での限界代替率との関係，第 3 節の効用関数の例などがある。後者の例としては，各命題や第 3 節の関数例などがある。

逆に，変化率が x の増加とともに減少する（逓減する）場合には，上記の条件式の不等号が逆となる。

証明　関数 F の変化率を x で微分すると，商の微分より

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F'(x)}{F(x)}\right)=\frac{F''(x)F(x)-(F'(x))^2}{(F(x))^2}=\left(\frac{F'(x)}{F(x)}\right)\left[\left(\frac{F''(x)}{F'(x)}\right)-\left(\frac{F'(x)}{F(x)}\right)\right]$$

を得る(8)。任意の $x\in X$ に対して $F(x)>0$ かつ $F'(x)>0$ であることより，これらによって上記の結果が成立する。　**証明終**

ここからは，この命題１に出てくる変化率の逓増条件を（条件Ｄ）と，変化率の逓減条件を（条件Ｅ）と呼んでおく。

（図による説明）　ここでは，命題１で得られた結果を実践的に活用していくために，この命題で得られた必要十分条件を使って変化率が逓増（逓減）する場合のグラフの特徴を説明する。今，関数 $y=F(x)(F'>0)$ のグラフ上の一点（x^0, y^0）における接線が横軸と交わる点（x^1, 0）を考える。そして，$\Delta x=x^0-x^1>0$ と $\Delta y=y^0=F(x^0)$ とおく。このとき接線の傾きの逆数は $1/F'(x^0)=\Delta x/\Delta y$ であるから，これより式 $\Delta x=F(x^0)/F'(x^0)$ が得られる。先の命題によると，このときの横軸上の線分の長さ Δx（変化率の逆数）は，変化率逓増（逓減）のケースでは接点（x^0, y^0）を右方にとればとるほど小さく（大きく）なっていくことが言える。

このような幾何学的な方法が使えれば，乗法分離型の効用関数のケースの三次元グラフを描いた際に，その特徴をより正確に読み取ることができる。つまり，一方の財の消費量を固定して効用曲面を縦に切った切り口となる曲線を見たときに，その曲がり具合が消費量を固定した方の財を下級財にする程度なのかどうかをこの方法で正確に調べられるのである。以下でこの方法の応用例を経済学で良く知られた二つの効用関数によって示す。

（図例−１）　限界効用が一定である効用関数 $U=x_1x_2$ のケース

ここで両財の限界効用が一定である効用関数 $U=x_1x_2$ を考える。この場合，どちらの財の消費量をいくらで固定しようとも切り口となる曲線は原点を通る直線であり，ゆえに

⑻　この式を用いれば第３節の効用関数例での計算が非常に簡単になる。

その接線はその直線自身に一致する。例えば，財 2 の消費量を $\overline{x_2}$ に固定して求めた横軸上の線分の長さは $\Delta x_1 = x_1^0$ となり，接点での財 1 の消費量 x_1^0 を増加させる毎に大きくなることが分かる。（定義に従ってこれを計算すると $\Delta x_1 = U(x_1^0, \overline{x_2})/U_1(x_1^0, \overline{x_2}) = x_1^0$ となる。あるいは，接線と横軸との交点が原点なので $x_1^1 = 0$ となることに注意されたい。）そのことから財 1 の効用の変化率は逓減し，よって財 2 が上級財となることが分かる。（財 1 についても同様。）以下の図 1 は財 2 の消費量を $\overline{x_2} = 1$ としたときのグラフである。容易に確認できるように，接点がより右方にあるときほど横軸上の線分 Δx_1 は長くなる。

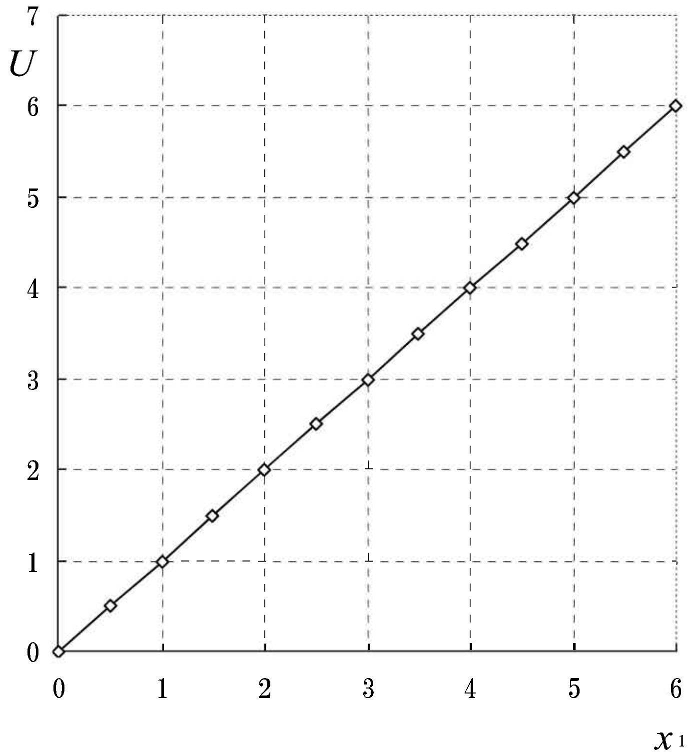

図 1　限界効用が一定のケース

（図例－2）　限界効用が逓減するコブ・ダグラス型効用関数 $U = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ のケース

ここではコブ・ダグラス型を考える。この場合にも財 2 の消費量を $\overline{x_2}$ に固定して求めた横軸上の線分の長さは同様の形となり，$\Delta x_1 = U(x_1^0, \overline{x_2})/U_1(x_1^0, \overline{x_2}) = x_1^0/\alpha$ となる。よって，先ほどのケースと同様に財 1 からの効用の変化率は逓減し，財 2 は上級財となる。（この結果と先ほどの結果の関係は，2.4節で示される命題 2 の結果を通じて理解できる。）

以下の図2はパラメータを$\alpha = 0.5$と$\overline{x_2} = 1$とした場合のグラフである。容易に確認できるように，接点が$A = (1,\ 1)$のときの横軸上の線分BCの長さ$\Delta x_1 = 2$よりも接点が$A' = (4,\ 2)$となったときの線分$B'C'$の長さ$\Delta x_1' = 8$の方が長くなっている。

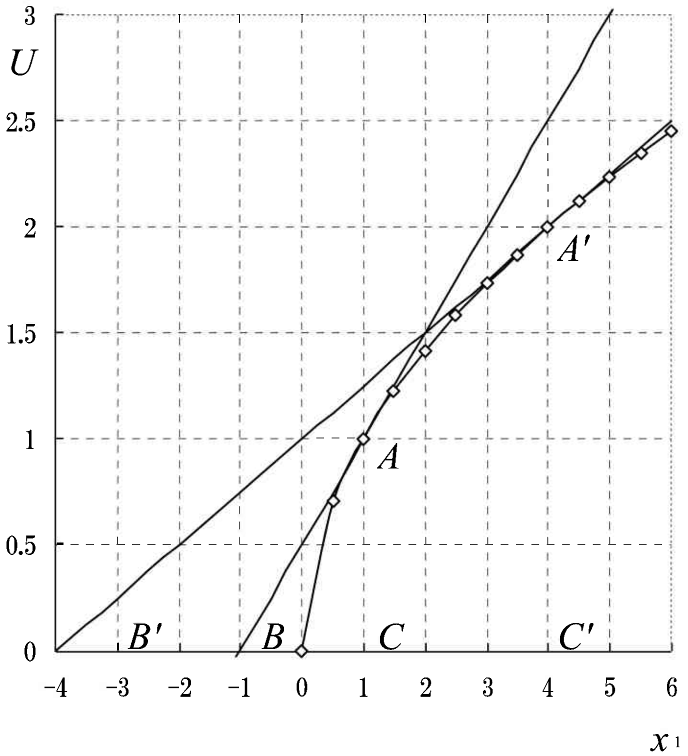

図2　コブ・ダグラス型のケース

（経済学的インプリケーション）　ここでは，命題1の経済学的インプリケーションを示す。そのために，先ほどの（図による説明）とは違い効用曲面を横に切って，その切り口となる無差別曲線の傾きである限界代替率を使う。ここで限界代替率を考えるのは，一方が上級財で他方が下級財となる両財の関係についての情報が，それぞれの財の消費量を変化させたときの限界代替率の変化の仕方に集約されているからである。どのような財が上級財や下級財になるのかは消費者の選好によると言われている。また，上級財や下級財というのは二つの財の相対的な関係で決まってくるとも言われている(9)。以下に見るように，上級財と下級財の区別が消費者の選好にどのように依存し，またそれらが消費者にとってど

(9)　これらの点について藤本（2009）では，標準的なミクロ経済学のテキスト，奥野・鈴村（1985），西村（1995），井堀（2004），神戸・賓多・濱田（2006）などの記述を基に検討している。

のような関係にあるのかということが限界代替率の変化の仕方から分かるのである。

限界代替率とは，一方の財の消費を限界的に増加させる場合に，もう一方の財の消費をどれだけ犠牲にしても良いと考えるのかという，効用が一定という条件下での二財の交換比率である。またそれは，消費を限界的に増やす一方の財への評価をもう一方の財の消費と比較する形式で示したものとも言える[10]。財の性質を特定せずに番号だけで区別すると，財 1 の財 2 で測った限界代替率は，効用一定の条件 $dU = U_1 dx_1 + U_2 dx_2 = 0$ の下での交換比率であり，二財の限界効用の比となる：

$$MRS_{12}(x_1,\ x_2) = -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U = const.} = \frac{U_1}{U_2}$$

ここでは，効用の変化率の変化と限界代替率の変化の関係を示すために三つの財を考える。一つ目の財 i と二つ目の財 j はともに効用の変化率が逓減するような財，そして三つ目の財 s は効用の変化率が逓増するような財であるとする。そして，二財の組み合わせ方を二通り考える。一番目の組み合わせは財 i と財 j の組（$x_i,\ x_j$）を消費するような場合であり，二番目の組み合わせは財 i と財 s の組（$x_i,\ x_s$）を消費するような場合である。最初の場合には両方の財が上級財となっているのに対し，二番目の場合では財 i が下級財で財 s が上級財となることに注意されたい。

まず，最初の組み合わせから考える。効用関数が乗法分離型であるために財 i の財 j で測った限界代替率は二財の効用の変化率の比となる：

$$MRS_{ij}(x_i,\ x_j) = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\left(\dfrac{I'(x_i)}{I(x_i)}\right)}{\left(\dfrac{J'(x_j)}{J(x_j)}\right)}$$

この式中の関数 J は財 j の効用であり，これまでと同様の表記の仕方をしている。この式より，消費者の選好を通じた二財の相対的な関係はそれぞれの効用の変化率から決まってくることが分かる。

ここで，二財の消費量を任意の（$x_i,\ x_j$）に固定して，そこから財 i の消費量のみを増

(10)　ここで使っている「交換比率」という言葉は奥野（2008，p.34）に，また「消費水準の限界的な評価を，もう一方の財の消費と比較する形式で示す」という解釈は井堀（2004，p.77）に負っている。

加させた場合の限界代替率の変化と財 j の消費量のみを増加させた場合の限界代替率の変化を調べる。まず，財 i の消費量のみを増加させた場合の限界代替率の変化は，この財の効用の変化率が逓減する（条件Ｅ）ことから減少となる：

$$（条件Ｆ）\quad \frac{\partial}{\partial x_i}MRS_{ij}(x_i,\ x_j)=\frac{\dfrac{d}{dx_i}\left(\dfrac{I'(x_i)}{I(x_i)}\right)}{\left(\dfrac{J'(x_j)}{J(x_j)}\right)}<0$$

そして，財 j の消費量のみを増加させた場合の限界代替率の変化は，この財の効用の変化率が逓減する（条件Ｅ）ことから増加する：

$$（条件Ｇ）\quad \frac{\partial}{\partial x_j}MRS_{ij}(x_i,\ x_j)=\frac{\left(\dfrac{I'(x_i)}{I(x_i)}\right)}{\left(\dfrac{J'(x_j)}{J(x_j)}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx_j}\left(\frac{J'(x_j)}{J(x_j)}\right)>0$$

これらの結果は，両方の財が上級財である場合には，財 i の限界的な消費を財 j の消費と比較した「相対的な」評価はその財 i の消費が大きくなるほど低くなり，もう一方の財 j の消費が大きくなるほど高くなることを意味している。この結果は消費水準が大きくなるほどその財の追加的な消費に対しての評価が低くなっていくという通常の結果と整合的である。

それに対して，上級財と下級財の組み合わせの場合にはこれとは全く異なる結果が得られる。二財の消費量を任意の（x_i, x_s）に固定して，そこから財 i（下級財）の消費量のみを増加させた場合の限界代替率の変化を求めると，財 i の効用の変化率は逓減する（条件Ｅ）ことから，こちらの方は先ほどの場合と同様に減少となる：

$$（条件Ｈ）\quad \frac{\partial}{\partial x_i}MRS_{is}(x_i,\ x_s)=\frac{\dfrac{d}{dx_i}\left(\dfrac{I'(x_i)}{I(x_i)}\right)}{\left(\dfrac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right)}<0 \tag{3}$$

しかし，財 s（上級財）の消費量のみを増加させた場合の限界代替率の変化は，この財の効用の変化率が逓増する（条件Ｄ）ことから，先ほどの場合とは逆に減少となるのであ

る[11]：

$$（条件Ｉ）\quad \frac{\partial}{\partial x_s}MRS_{is}(x_i,\ x_s) = -\frac{\left(\dfrac{I'(x_i)}{I(x_i)}\right)}{\left(\dfrac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx_s}\left(\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right) < 0 \tag{4}$$

これらの結果を先ほどの結果と比較してみる。すると，財 i の限界的な消費をもう一方の財の消費と比較した「相対的な」評価は，組み合わされるもう一方の財の性質によって変わってくることが分かる。もう一方の財が効用の変化率が逓増するような財 s である場合には，財 i の「相対的な」評価はどちらの財の消費が増加した場合にも低くなっていくのである。このことは，下級財に対する相対的な評価は上級財をより多く消費しているときほど低くなることを意味する[12]。これが命題１の結果から言える上級財と下級財の関係である。

当然のことながら，財の消費の組を動かしたときの限界代替率の変化の仕方は無差別曲線の形状を決めている。ここでは，以上の結果と無差別曲線の形状の関係を考察する。両方が上級財である財 i と財 j の組み合わせでは，財 i の消費量の増加によって限界代替率は小さくなり財 j の消費量の増加によってそれは大きくなった。ここで，消費量の組を任意の（$x_i,\ x_j$）に固定してそこから両財の消費量をそれぞれ（$dx_i,\ dx_j$）だけ変化させることを考える。（条件Ｆ）と（条件Ｇ）より，財 i の消費量を増加させ財 j の消費量を減少させる（$dx_i > 0$ と $dx_j < 0$）右下方ならば，その範囲でどの向きに消費の組を動かしても限界代替率は小さくなっていき，逆に財 i の消費量を減少させ財 j の消費量を増加させる（$dx_i < 0$ と $dx_j > 0$）左上方へ動かすならば，限界代替率は大きくなっていくことが

(11) Vandermeulen（1972）は幾何学的な考察からこの性質を指摘し，これを「下級財の消費が効用を増加させる効果と減少させる効果を同時に持ち有限の消費の組で下級財の限界効用がゼロとなる」ような関数の性質から「効用の飽和」という言葉を使って説明しようとしている。それに対して本稿では，上級財の効用の増加の程度からこの性質を得ている。こちらの方がスルツキー方程式から得られる結果「一方の財の特性は他方の財から得られる効用の性質から決まっている」と整合的であると思われる。また効用の増加の程度については，Weber（1997）が Wold and Jureen（1953）の効用関数において上級財の効用の増加の程度（限界効用の二階微分）が大きいことには着目している。

(12) 加法分離型 $U = I(x_i) + S(x_s)$ の場合でも，下級財の効用関数の方が凹，$I''(x_i) < 0$，であり上級財の効用関数の方が凸，$S''(x_s) > 0$，であることから，限界代替率 $MRS_{is}(x_i,\ x_s) = I'(x_i)/S'(x_s)$ は同様の変化をする。2.2節の判定条件(1)と(2)とここでの結果から，加法分離型の場合に限界効用を使って調べられることと同じことを乗法分離型の場合に調べるには，効用の変化率を使わなければならないことが分かる。

分かる[13]。固定する組はどこにでも任意に取ることができるので，無差別曲線は常に原点に向かって凸となっていることが分かる。

他方で，下級財 i と上級財 s の組み合わせでは，任意に固定した消費の組から下級財 i と上級財 s の消費量をともに増加させる右上方へと消費の組を動かしていくことで限界代替率は小さくなっていき，逆に両財の消費量をともに減少させる左下方へと消費の組を動かしていくことで限界代替率は大きくなっていくことが（条件H）と（条件Ｉ）から言える。このとき，限界代替率の変化を調べるために固定する点はどこにでも任意に取れることから無差別曲線の傾きは全体的に右上方ほど緩やかで左下方ほど急勾配になると言える。以上の理由で，下級財が含まれる場合の無差別曲線は下級財の消費量が増加する方向へと末広がりになるという特徴的な形状となるものと考えられる。

2.3　効用の変化率の変化と限界代替率逓減の条件の関係

前節では，乗法分離型効用関数の場合に上級財と下級財を区別するために効用の変化率の逓増・逓減の概念を導入し，その必要十分条件と経済学的なインプリケーションを取り上げた。本節では，さらにそれらと限界代替率逓減の条件との関係を示す。限界代替率の逓減は，スルツキー方程式による分析の基礎となる制約条件付最大化問題の一階条件を使った解法が意味を持つために必要な前提条件となる。また，その分析での上級財と下級財の区別にも必要な条件でもある[14]。そこで，効用関数が変化率の逓増する関数と逓減する関数の積で表される場合に限界代替率逓減の条件が満たされるのかを調べるわけである。

いま，財 i の消費量が限界的に変化したときの限界代替率の変化は

$$\frac{d}{dx_i}MRS_{is}(x_i,\ x_s)=\frac{\partial}{\partial x_i}MRS_{is}(x_i,\ x_s)+\frac{\partial}{\partial x_s}MRS_{is}(x_i,\ x_s)\frac{dx_s}{dx_i} \tag{5}$$

である。この式に2.2節の(3)式と(4)式を代入すると，乗法分離型の場合の変化は

$$\frac{d}{dx_i}MRS_{is}(x_i,\ x_s)=\left(\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right)^{-2}$$
$$\left[\left(\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right)\cdot\frac{d}{dx_i}\left(\frac{I'(x_i)}{I(x_i)}\right)-\left(\frac{I'(x_i)}{I(x_i)}\right)\cdot\frac{d}{dx_s}\left(\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right)\cdot\frac{dx_s}{dx_i}\right]$$

---

(13)　ここで，「その範囲でどの向きに動かしても」というのは，同じ無差別曲線上で動かすのか違う無差別曲線上へと動かすのかに関わらずという意味である。

(14)　限界代替率の逓減（効用関数の強い意味での準凹性）を示す行列式は所得効果の項の分母にでてくる。このことについては西村（1990）の第３章の補論を参照されたい。

となる。ここで，効用が一定という条件の下では $-dx_s/dx_i=(I'(x_i)/I(x_i))/(S'(x_s)/S(x_s))$ であり限界代替率に等しいことから，これを上式に代入することで

$$\frac{d}{dx_i}MRS_{is}(x_i,\ x_s)=\left(\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right)^{-3}\left[\left(\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right)^2\frac{d}{dx_i}\left(\frac{I'(x_i)}{I(x_i)}\right)+\left(\frac{I'(x_i)}{I(x_i)}\right)^2\frac{d}{dx_s}\left(\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right)\right]$$

と書き換えることができる。

この式によると，限界代替率の逓減は負の項（下級財の効用の変化率の逓減）と正の項（上級財の効用の変化率の逓増）の和が負となることを要求するので，上級財の効用の変化率の逓増に上限を与える追加的な制約となることが分かる。前節の考察を振り返ってみれば，二財のうちで一方が下級財となる条件からは消費の組を右下方や左上方へと動かすときの限界代替率の変化については確定しないので，限界代替率の逓減によってさらなる追加的制約が加わるのは当然のことである。この結果は，上級財については（条件Ｄ）から（条件Ｉ）が，下級財については（条件Ｅ）から（条件Ｈ）がそれぞれ得られるが，式(5)から分かるとおり，（条件Ｈ）と（条件Ｉ）の組み合わせからは限界代替率の逓減（条件Ａ）が必ずしも得られないのだと整理できる。以上により，一方が下級財のときを考える際に本質的な仮定は，（条件Ａ）と（条件Ｈ）と（条件Ｉ）の三つとなることが分かる。

それに対して，前節の考察のとおり両財が上級財であるときには限界代替率が必ず逓減することが確かめられる。この結果は，乗法分離型の場合には，両財について（条件Ｅ）が満たされることから（条件Ｆ）と（条件Ｇ）が満たされ，結果として式(5)より限界代替率の逓減（条件Ａ）が成立するのだと整理できる。また，（条件Ｅ）が満たされているときに両財は上級財となる。効用関数が乗法分離型ではない場合でも，（条件Ｆ）と（条件Ｇ）の符号を仮定しておけば結果として限界代替率の逓減（条件Ａ）が満たされ，なおかつ両財は上級財となる。以上により，上級財の組み合わせを考える際に本質的な仮定は限界代替率の変化についての（条件Ｆ）と（条件Ｇ）であると言える。

以上で展開した限界代替率の変化と財の区別についての議論は一般化できる。それについては補論で展開する。

さらに効用の変化率の変化の項を計算して上式を整理すれば，限界代替率が逓減する十分条件は，基本的前提 $I'(x_i)>0$ と $S'(x_s)>0$ の下では，

（条件A’）

$$\left(\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right)\left[\left(\frac{I''(x_i)}{I'(x_i)}\right)-\left(\frac{I'(x_i)}{I(x_i)}\right)\right]+\left(\frac{I'(x_i)}{I(x_i)}\right)\left[\left(\frac{S''(x_s)}{S'(x_s)}\right)-\left(\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right)\right]<0$$

となることが分かる。以下の節では，限界代替率の逓減を判定するときにはこの（条件A’）を用いる。

次節では，一方が下級財の場合の効用関数を具体的に構成するために，関数の変化率の変化が持つ性質について考察してみる。

2.4　変化率の変化と関数の性質

本稿で導入した効用の変化率の逓減・逓増は，乗法分離型効用関数の場合で上級財と下級財を区別するために導入されたものである。ここで，その主な性質を二つ取り上げる。

第一に，限界効用の逓増・逓減との関係である。2.1節の式(1)より分かるように，効用の変化率が逓増する場合には必ず限界効用が逓増するといえるが，逆に限界効用が逓増するからといって必ず変化率が逓増するわけではない。つまり，変化率の逓増の方は限界効用の逓増よりも制約的な条件である。その結果，変化率の逓減の方は限界効用の逓減よりも弱い条件となっている。つまり，限界効用が逓減するような場合には効用の変化率は必ず逓減するが，逆に効用の変化率が逓減するからといって必ずしも限界効用が逓減するわけではない。限界効用が逓増する場合もありうる[15]。これらの事実から，上級財が一般にありやすく下級財がありにくいのは，他方の財を下級財にするような上級財の効用関数がありにくいからだと考えられる。言い換えれば，下級財が特殊な存在となっているのは，その財を相対的に下級財の位置に置くようなもう一方の上級財の方が特殊だからだと言えよう。現に2.2節の（経済学的インプリケーション）で見たように，ある財がそれ自体では消費者にとって同じものであっても，もう一方の財の効用の変化率が逓増すればその財は下級財となり，もう一方の財の効用の変化率が逓減すればその財は上級財となってしまった。要するに，その財を下級財に位置に置くような他の財さえ無ければ，どの財であっても消費者にとって上級財となり得るのだ。

---

(15)　藤本（2009）において，「一方が下級財で他方が上級財というのがありうるのは，上級財の限界効用が逓増し，下級財の限界効用が逓減または一定または逓増するときである」というふうに両方に共通する「逓増する」の部分があいまいな結論に終わっていたのは，判断に限界効用を使っていたからである。本稿で導入した効用の変化率を使えば限界効用が逓増するケースの中で，上級財の効用関数になるものと下級財の効用関数になるものの間に明確な線引きを行うことが出来る。

第二の性質は変換についての保存である。効用関数の持つ通常の性質と同じく正の定数倍（スケール変換）について保存されるだけでなく，それ以外の二つの変換によっても変化率の変化の性質は保存される。その一つは正のべき乗である。そしてもう一つは積である。これらの変換によってこの性質が保存されるのは以下の理由による。変化率は，その関数の対数をとって変数で微分することによって求められる。ここで微分演算の線形性を考えると，対数での正の実数倍と和に当たる正のべき乗と積

$$\log((F(x))^n) = n\cdot\log(F(x)) \text{ と } \log(F(x)\cdot G(x)) = \log(F(x))+\log(G(x))$$

によってのみ変化率の増減という性質はそのまま保存されるのである。

先ずは正のべき乗の場合の結果を示す。

命題2. 関数 $F: X \to R$（任意の $x \in X$ に対して $F(x) > 0$ かつ $F'(x) > 0$）の変化率が逓増するとする。

$$0 < \frac{F'(x)}{F(x)} < \frac{F''(x)}{F'(x)}$$

すると，この関数の正のべき乗となる関数 $G(x) = (F(x))^n$（$n > 0$）でも変化率が逓増する：

$$0 < \frac{G'(x)}{G(x)} < \frac{G''(x)}{G'(x)}$$

逆に F の変化率が逓減するときには G の変化率も逓減する。

証明　関数 G を $x \in X$ で微分すると

$$G'(x) = n(F(x))^{n-1}\cdot F'(x) > 0$$

と

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = n\frac{F'(x)}{F(x)} > 0$$

が得られる。これらのうち変化率の方をさらに $x \in X$ で微分すると以下の式を得る：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{G'(x)}{G(x)}\right) = n\frac{d}{dx}\left(\frac{F'(x)}{F(x)}\right)$$

よって命題1より，$n > 0$ のときには関数 F の変化率が逓増（逓減）すれば関数 G の変化率も逓増（逓減）すると言える。　**証明終**

このように，微分するたびに右肩のべき乗が一つずつ下がり新たにかかってくる係数が一つずつ小さくなるような変換では，変化率の変化という性質は保存されるのである。

（例）　単調増加一次関数 $F(x) = \alpha + \beta x (\max[0, -\alpha/\beta] < x, \beta > 0)$ のべき乗の例

ここでは命題2の応用として単調増加な一次関数のべき乗を考える。まず，一次関数 $F(x) = \alpha + \beta x$ については以下の結果が得られる。定義域が $\max[0, -\alpha/\beta] < x$ より $F(x) > 0$(16)，パラメータが $\beta > 0$ より $F'(x) > 0$ となり，さらに変化率の逓減が見られる：

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\beta}{\alpha + \beta x} > \frac{0}{\beta} = \frac{F''(x)}{F'(x)}$$

命題2によれば，定数 α の符号によらず，一次関数の正のべき乗の場合には $n > 0$ がどんなに大きくても変化率は逓減するのである。

後に3.3節で示すように，一次関数のべき乗の場合にはもとの一次関数が単調増加 $F'(x) > 0$ という基本的前提を満たさないことを許してやれば，負の $n < 0$ のときに変化率が逓増するケースが見つかる。当然のことながら，そのときにべき乗して得られた関数は正かつ単調増加であり基本的前提を満たす。

続いては積の場合の結果である。

命題3.　関数 $F: X \to R$（任意の $x \in X$ に対して $F(x) > 0$ かつ $F'(x) > 0$）と $G: X \to R$（任意の $x \in X$ に対して $G(x) > 0$ かつ $G'(x) > 0$）の変化率がともに逓増

(16)　ここで，記号 $\max[a, b]$ というのは通常どおり a と b のうちで大きい方を表している。

するとする。

$$0 < \frac{F'(x)}{F(x)} < \frac{F''(x)}{F'(x)} \text{ かつ } 0 < \frac{G'(x)}{G(x)} < \frac{G''(x)}{G'(x)}$$

すると，これらの関数の積となる関数 $H(x) = F(x)G(x)$ でも変化率が逓増する：

$$0 < \frac{H'(x)}{H(x)} < \frac{H''(x)}{H'(x)}$$

逆に F と G の変化率がともに逓減するときには H の変化率も逓減する。

証明　関数 H を $x \in X$ で微分すると

$$H'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) > 0$$

と

$$\frac{H'(x)}{H(x)} = \frac{F'(x)}{F(x)} + \frac{G'(x)}{G(x)} > 0$$

が得られる。これらのうち変化率の方をさらに $x \in X$ で微分すると以下の式を得る：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{H'(x)}{H(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{F'(x)}{F(x)}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{G'(x)}{G(x)}\right)$$

よって命題1より，関数 F と関数 G の変化率がともに逓増（逓減）すれば関数 H の変化率も逓増（逓減）すると言える。　**証明終**

本節の命題2とその例，そして命題3の結果から，代数的な演算によって得られる関数ではことごとく変化率が逓減することが分かる。先ず1次式がそうでありその積とべき乗によって得られる因数分解可能な多項式もそうである。さらに次の第3節から分かるように，初等関数の場合にも変化率が逓増するような関数はなかなか見つからないのである。

3.　下級財を含む場合の効用関数の例

本節ではさらに効用の変化率が逓増する関数と逓減する関数を見つけ出し，下級財を含む場合の効用関数の例を示す。また，本節で関数を表すときには重複をいとわず記号 F を使っていく。

3.1　指数関数のケース

まずは，絶対的リスク回避度一定の効用関数（指数関数）を考える[17]。

$$F(x) = -\exp(-\gamma x)$$

ここで，記号 $\gamma > 0$ は一定の絶対的リスク回避度 $\gamma = -F''(x)/F'(x)$ である。この関数について以下の結果が得られる。

$$F'(x) = \gamma\exp(-\gamma x) > 0,\ F''(x) = -\gamma^2\exp(-\gamma x) < 0$$

よって，

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{F''(x)}{F'(X)} = -\gamma$$

これより，絶対的リスク回避度一定で特徴付けられる効用関数が各財の効用水準を表す場合にはどちらの財も下級財にはならない。その原因は，指数関数の中にあるのが一次関数であることである。そうであると，式中にマイナスの項が含まれなかったとしても，その結果として関数が凸関数になったとしても最後の結果は同じになる。実際，関数 $F(x) = \exp(\gamma x)$ の場合には以下の結果が得られる：

$$F'(x) = \gamma\exp(\gamma x) > 0,\ F''(x) = \gamma^2\exp(\gamma x) > 0$$

でも

⒄　リスク回避度一定の効用関数については，例えば，Laffont（1985）等を参照のこと。

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{F''(x)}{F'(X)}=\gamma$$

以下では，中にある関数が凸関数であるとその変化率が逓増することを示す。

命題4.　凸関数 $f: X\to R$（任意の $x\in X$ に対して $f'(x)>0$ かつ $f''(x)>0$）に対して，$F(x)=\exp(f(x))$ で定義できる関数の変化率は逓増する：

$$0<\frac{F'(x)}{F(x)}<\frac{F''(x)}{F'(x)}$$

逆に f が凹関数であるならば F の変化率は逓減する。

証明　関数 F を $x\in X$ で微分すると，合成関数の微分より

$$F'(x)=\exp(f(x))\cdot f'(x)>0$$

と

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=f'(x)>0$$

が得られる。このとき命題1より，関数 f が凸関数（凹関数）であれば関数 F の変化率は逓増（逓減）すると言える：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F'(x)}{F(x)}\right)=f''(x)$$

これによって上記の結果が得られた。　**証明終**

以下で凸関数の指数変換を使った効用関数の例を示す。

（例3.1）　指数関数を使った効用関数の例

ここで，乗法分離型効用関数：

$$U=I(x_i)S(x_s)$$

$I(x_i)=(\alpha_i+\beta_i x_i)^m$（$\beta_i>0$, $m>0$）かつ $S(x_s)=\exp(x_s^n)$（$n>1$）

を考える。さらに，各財の消費量の範囲を $\max[0, -\alpha_i/\beta_i]<x_i$ と $x_s>0$ とする。ここでは，下級財の効用関数 I を命題2の方法によって得られる一次関数（単調増加）の正のべき乗としておく。このとき下級財の効用関数 I については

$$\frac{I'(x_i)}{I(x_i)}=\frac{\beta_i m}{\alpha_i+\beta_i x_i}>0,\ \frac{I''(x_i)}{I'(x_i)}-\frac{I'(x_i)}{I(x_i)}=-\frac{\beta_i}{\alpha_i+\beta_i x_i}<0$$

が得られる。そして上級財の効用関数 S については，先の命題3での議論により，

$$\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}=nx_s^{n-1}>0,\ \frac{S''(x_s)}{S'(x_s)}-\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}=\frac{n-1}{x_s}>0$$

が得られる。限界代替率が逓減するのは，2.3節の（条件A'）が満たされるときなので，この場合では条件式：

$$nx_s^{n-1}\left[-\frac{\beta_i}{\alpha_i+\beta_i x_i}\right]+\left[\frac{\beta_i m}{\alpha_i+\beta_i x_i}\right]\cdot\left[\frac{n-1}{x_s}\right]<0$$

が満たされなければならない。上級財と下級財の消費量は $x_s>0$ かつ $x_i>0$ なので，この条件式は

$$x_s^n>\frac{m(n-1)}{n}$$

となる。ここでは下級財の消費量が $\max[0, -\alpha_i/\beta_i]<x_i$ となっているため，パラメータ α_i の符号は限界代替率の逓減には無関係となっている。ここで，例えばパラメータを $m=1/2$ と $n=2$ にすると，限界代替率は上級財の消費量が $x_s>1/2$ ならば逓減する。以下ではこの場合のグラフを図3に示しておく[18]。グラフの中では確かに左側の軸にとった上級財の消費量が $x_s<0.5$ となる領域で無差別曲線が原点に向かって凹となる部分が

---

(18)　このグラフは，パラメータが $\alpha_i=-0.1$ と $\beta_i=1$，定義域が $0.1<x_i\leq 2$ かつ $0\leq x_s\leq 2$ で値域が $0\leq U\leq 40$ で描いている。左奥の平面 $x_s=2$ 上に見られる曲線が凹関数 $U=\sqrt{x_i-0.1}$ $\exp(4)$のグラフで，右奥の平面 $x_i=2$ 上に見られる曲線が凸関数 $U=\sqrt{1.9}\exp(x_s^2)$ のグラフである。これらの曲線に2.2節の（図による説明）の方法を適用すれば，このグラフからより正確な情報が読み取れる。

あることが見て取れる。ちなみに，パラメータが $\alpha_i < 0$ であれば条件：

$$0 < \frac{m(n-1)}{n} < x_s^n < \frac{\beta_i x_i}{\alpha_i+\beta_i x_i}\,\frac{m(n-1)}{n}$$

を満たす領域において財 1 はギッフェン財となる[19]。

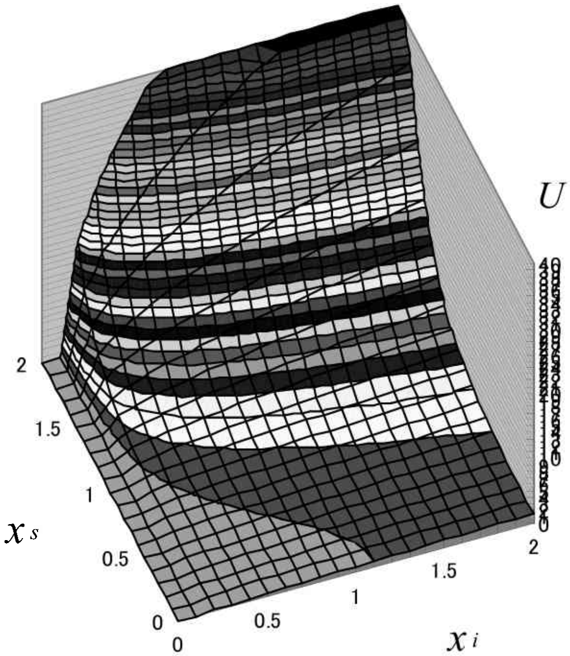

図 3　指数関数を使った例

3.2　対数関数のケース

次いで，相対的リスク回避度一定の効用関数（対数関数）を考える。

$$F(x) = \log(x)$$

このときには相対的リスク回避度は $\gamma = -xF''(x)/F'(x) = 1$ となっている。これについては以下のものが得られる。

[19]　この条件式については補論の（条件K'）を参照されたい。

$$F'(x)=\frac{1}{x}>0,\ F''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$$

よって，

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{1}{x\log(x)}>-\frac{1}{x}=\frac{F''(x)}{F(x)}$$

これより，各財の効用水準が相対的リスク回避度一定の効用関数で表現されている場合にも下級財はありえないことが分かる。2.4節での考察とこの例から，一方の財が下級財の場合の効用関数が見つかりにくいのは，経済学で良く知られた性質を持つ関数の中に上級財の効用関数となるものが無いことが原因であると考えられる。

3.3　べき乗関数のケース

次に，以下のようなべき乗関数を考える。

$$F(x)=(\alpha+\beta x)^{\beta n}\ \text{ここで}\ n>0$$

これについては以下のものが得られる。

$$F'(x)=\beta^2 n(\alpha+\beta x)^{\beta n-1}>0\ \text{かつ}\ F''(x)=\beta^3 n(\beta n-1)(\alpha+\beta x)^{\beta n-2}$$

よって

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{\beta^2 n}{\alpha+\beta x}\ \text{かつ}\ \frac{F''(x)}{F'(x)}=\frac{\beta(\beta n-1)}{\alpha+\beta x}$$

このときに容易に確かめられるように，$\alpha+\beta x>0$ かつ $\beta(\beta n-1)>0$ ならば，関数 F は凸関数である。しかし，パラメータが正 $\beta>0$ であれば $\beta n>\beta n-1$ より必ず

$$\frac{F'(x)}{F(x)}>\frac{F''(x)}{F'(x)}$$

となってしまう。つまり，$\beta^2 n<\beta(\beta n-1)$ となるためには，関数 F が単に凸関数である

だけではなく，パラメータが負 $\beta < 0$ とならなければならない。以上により，定義域が $\max[0, -\alpha/\beta] < x$ であり，かつパラメータが負 $\beta < 0$ である場合，べき乗関数 F は上級財の効用関数の条件を満たす。

とはいえ，この関数が上級財の効用関数となるのはこれまでの議論（例えば命題2など）とは異なる理由による。つまり，この関数は $F(x) = (f(x))^{-n}$ と書くことができ，$f(x) > 0$ かつ $f'(x) < 0$ かつ $f''(x) = 0$ となるような基本的前提を満たしていない関数からできている。ここから，

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = -n\frac{f'(x)}{f(x)} > 0 \text{ よって } \frac{d}{dx}\left(\frac{F'(x)}{F(x)}\right) = -n\frac{0 \cdot f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} > 0$$

となり，F の変化率が逓増しているのである。このような場合の結果を以下に示しておく。

命題5. 関数 $f: X \to R$（任意の $x \in X$ に対して $f(x) > 0$ かつ $f'(x) < 0$）の変化率が逓減するのならば，その負のべき乗となる関数 $F(x) = (f(x))^{-n}$（$n > 0$）の変化率は逓増する：

$$0 < \frac{F'(x)}{F(x)} < \frac{F''(x)}{F'(x)}$$

証明 関数 F を $x \in X$ で微分すると

$$F'(x) = -n(f(x))^{-n-1} \cdot f'(x) > 0$$

と

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = -n\frac{f'(x)}{f(x)} > 0$$

が得られる。このとき命題1より，$n > 0$ のときには関数 f の変化率が逓減すれば関数 F の変化率は逓増すると言える：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F'(x)}{F(x)}\right) = -n\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

証明終

ここで，関数 f の変化率を $x \in X$ で微分すると，商の微分より

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2}$$

となる。よって，この関数 f について $f(x) > 0$ かつ $f'(x) < 0$ のとき $f''(x) \leq 0$ であれば必ずその変化率は逓減する。

以下では，命題５の特殊ケースである一次の減少関数を使った場合と二次の減少関数を使った場合の例を示す。

（例3.3–1）　負のべき乗関数を使った効用関数の例(1)

先ずは，最初の例を用いた乗法分離型効用関数：

$$U = I(x_i)S(x_s)$$

$$I(x_i) = (\alpha_i + \beta_i x_i)^m \ (\beta_i > 0,\ m > 0) \text{ かつ } S(x_s) = (\alpha_s - \beta_s x_s)^{-n} (\alpha_s > 0,\ \beta_s > 0,\ n > 0)$$

を考える。さらに，各財の消費量の範囲を $\max[0, -\alpha_i/\beta_i] < x_i$ と $0 < x_s < \alpha_s/\beta_s$ とする。下級財の効用関数 I の方は命題２の方法によって得られるものであり，上級財の効用関数 S の方は先ほどの命題５の方法で得られるものである。

このクラスの関数は古くから良く知られているものでもある。例えば，Wold and Jureen（1953）による古典的な例はパラメータがそれぞれ $\alpha_i = -1$，$\beta_i = 1$，$m = 1$ と，$\alpha_s = -2$，$\beta_s = -1$，$n = 2$ で，定義域がそれぞれ $x_i > 1$ と $0 < x_s < 2$ のケースである[20]。また，藤本（2009）で分析したのはそれを修正したパラメータが $\alpha_i = 0$，$\beta_i = 1$，$\beta_s = 1$ で，定義域がそれぞれ $x_i > 0$ と $0 < x_s < \alpha_s$ のケースである（それ以外はここと同じ）[21]。

(20)　Wold and Jureen（1953）の例では，ギッフェン財のケースを扱うためにパラメータを $\alpha_i = -1$ としていることから，効用が負となる領域が左側に存在している。本稿のその他の例からも確かめられるとおり，乗法分離型のときにギッフェン財を扱うためには，$\alpha_i < 0$ と $\beta_i > 0$ として下級財の消費量に正の下限を設けなければならない。ただし，α_i が正であろうと負であろうとゼロであろうと限界代替率の逓減の方には無関係である。

(21)　藤本（2009, p.55）の図１では，さらにパラメータを $m = 1$，$n = 2$，$\alpha_s = 21$ と，そして定義域をそれぞれ $0 \leq x_i \leq 20$ と $0 \leq x_s \leq 20$ と特定した場合のグラフを値域 $0 \leq U \leq 0.25$ の範囲で示している。本稿のその他の場合のグラフと比較されたい。

このとき下級財の効用関数 I については

$$\frac{I'(x_i)}{I(x_i)} = \frac{\beta_i m}{\alpha_i+\beta_i x_i} > 0,\ \frac{I''(x_i)}{I'(x_i)} - \frac{I'(x_i)}{I(x_i)} = -\frac{\beta_i}{\alpha_i+\beta_i x_i} < 0$$

が得られる。そして上級財の効用関数 S については同様にして

$$\frac{S'(x_s)}{S(x_s)} = \frac{\beta_s n}{\alpha_s-\beta_s x_s} > 0,\ \frac{S''(x_s)}{S'(x_s)} - \frac{S'(x_s)}{S(x_s)} = -\frac{\beta_s}{\alpha_s-\beta_s x_s} > 0$$

が得られる。限界代替率が逓減するのは，2.3節の（条件A'）が満たされるときなので，この場合では条件式：

$$\frac{\beta_i\beta_s(m-n)}{(\alpha_i+\beta_i x_i)(\alpha_s-\beta_s x_s)} < 0$$

が満たされなければならない。パラメータの仮定より $\beta_i\beta_s > 0$ なので，$m < n$ のときに限界代替率は逓減する。このときには，限界代替率の逓減によって定義域は制限されない。ここでは下級財の消費量が $\max[0,\ -\alpha_i/\beta_i] < x_i$ となっているため，パラメータ α_i の符号は限界代替率の逓減には無関係となっている。ちなみに，パラメータが $\alpha_i < 0$ であれば条件：

$$0 < \frac{-\alpha_i}{\beta_i} < x_i < -\frac{\alpha_i}{\beta_i}\frac{n}{n-m}$$

を満たす領域において財1はギッフェン財となる（上記の Wold and Jureen（1953）の例を参照されたい）。

（例3.3–2） 負のべき乗関数を使った効用関数の例(2)

次いで，先の命題5の一例となる関数を用いた乗法分離型効用関数：

$$U = I(x_i)S(x_s)$$

$$I(x_i) = (\alpha_i+\beta_i x_i)^m\ (\beta_i > 0,\ m > 0)\ \text{かつ}\ S(x_s) = (\alpha_s-\beta_s x_s^2)^{-n}\ (\alpha_s > 0,\ \beta_s > 0,\ n > 0)$$

を考える。さらに，各財の消費量の範囲を $\max[0,\ -\alpha_i/\beta_i] < x_i$ と $0 < x_s < \sqrt{\alpha_s/\beta_s}$ とする。下級財の効用関数 I はこれまでと同じものである。よって，下級財の効用関数 I については

$$\frac{I'(x_i)}{I(x_i)} = \frac{\beta_i m}{\alpha_i + \beta_i x_i} > 0,\ \frac{I''(x_i)}{I'(x_i)} - \frac{I'(x_i)}{I(x_i)} = -\frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i x_i} < 0$$

が得られる。そして上級財の効用関数 S については同様にして

$$\frac{S'(x_s)}{S(x_s)} = \frac{2\beta_s n x_s}{\alpha_s - \beta_s x_s^2} > 0,\ \frac{S''(x_s)}{S'(x_s)} - \frac{S'(x_s)}{S(x_s)} = \frac{1}{x_s} + \frac{2\beta_s x_s}{\alpha_s - \beta_s x_s^2} > 0$$

が得られる。限界代替率が逓減するのは，（条件A'）が満たされるときなので，この場合では条件式：

$$\frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i x_i} \cdot \frac{\alpha_s m - \beta_s (2n - m) x_s^2}{x_s(\alpha_s - \beta_s x_s^2)} < 0$$

が満たされなければならない。これより，それぞれの財の消費量の範囲 $x_i > 0$ と

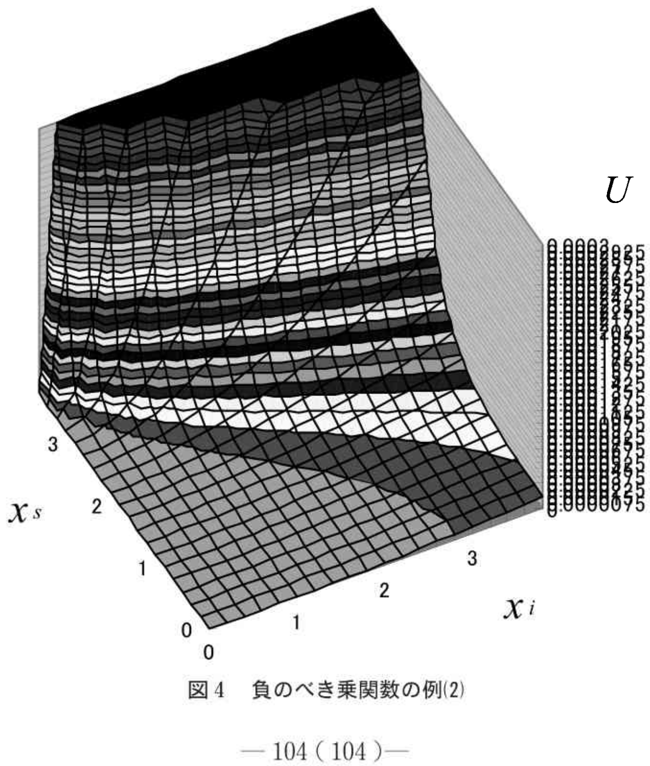

図４　負のべき乗関数の例(2)

$\sqrt{(\alpha_s/\beta_s)\cdot(m/(2n-m))} < x_s < \sqrt{\alpha_s/\beta_s}$ で限界代替率が逓減する。また，この範囲が空とならないためには $m < n$ が必要である。ここで，パラメータの値を $m = 2$ と $\alpha_s = 16$, $\beta_s = 1$，$n = 5$ とすると，限界代替率が逓減する範囲は $x_i > 0$ と $2 < x_s < 4$ となる。この例のグラフを以下の図4に示しておく(22)。すると，確かに左側の軸にとった上級財の消費量が $0 < x_s < 2$ となる範囲では無差別曲線が原点に対して凹となる部分があることが見て取れる。

4. まとめと考察

本稿では，乗法分離型効用関数の場合に一方が下級財で他方が上級財となるのならば，効用関数はどのような特性を持つのかということを分析した。限界代替率の逓減を前提とすると，命題1の結果は下級財からの効用の変化率は逓減し上級財からの効用の変化率は逓増することを意味する。このときの変化率の変化は以下の式の符号によって判別される：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F'(x)}{F(x)}\right)=\left(\frac{F'(x)}{F(x)}\right)\left[\left(\frac{F''(x)}{F'(x)}\right)-\left(\frac{F'(x)}{F(x)}\right)\right]$$

このときに，関数の変化率 $F'(x)/F(x)$ がその関数の対数をとって変数 x で微分することで求められることを念頭に置くと，その変化率の変化の仕方はある種の変換によっては変わらないことが分かる。またその逆に，変化率の変化の仕方が逆になるような変換が存在することも分かる。

ここからは，本稿で得られた諸結果のまとめと考察のために，いかにして変化率が逓増するような関数を見つけるかという問題を考えてみる。

最初に，関数全体を二つの基準によって四つに分類する。第一の基準は，増加関数か減少関数かである。そして第二の基準は変化率が逓増するか逓減するかである。まず増加関数でありその変化率が逓増するような場合を（ケース増増）と呼ぶ。このケースについては2.2節の命題2から正のべき乗をしてもその性質が保存されることが言える。つまり，関数 f_{++} が任意の $x \in X$ に対して $f_{++}(x) > 0$ かつ $f_{++}{}'(x) > 0$ かつ $d(f_{++}{}'(x)/$

(22) このグラフは，パラメータが $\alpha_i = 0$ と $\beta_i = 1$，定義域が $0 \leq x_i \leq 3.8$ かつ $0 \leq x_s \leq 3.8$ で値域が $0 \leq U \leq 0.0003$ で描いている。また，左奥の平面 $x_s = 3.8$ 上に見られる曲線が凸関数 $U = 0.108237314\cdot x_i^2$ のグラフで，右奥の平面 $x_i = 3.8$ 上に見られる曲線が凸関数 $U = 14.44\cdot(16-x_s^2)^{-5}$ のグラフである。前述のように，これらの曲線に2.2節の（図による説明）の方法を適用するとこのグラフの特徴をより正確に読み取れる。

$f_{++}(x))/dx>0$ を満たすとする。すると，その正のべき乗である関数 $G(x)=(f_{++}(x))^n$（$n>0$）も増加かつ変化率が逓増する：

$$G'(x)=n(f_{++}(x))^{n-1}\cdot f_{++}'(x)>0 \text{ かつ } \frac{d}{dx}\left(\frac{G'(x)}{G(x)}\right)=n\frac{d}{dx}\left(\frac{f_{++}'(x)}{f_{++}(x)}\right)>0$$

ただし，この結果は変化率が逓増するような関数が少なくとも一つ見つかった後でさらに別の変化率が逓増するような関数を見つける場合にしか使えない。そこで，第二のケース（ケース減減）がでてくる。このケースに当てはまる関数は減少関数でなおかつ変化率が逓減するようなものである。3.3節の命題５によると，このケースの関数は負のべき乗をすることによって（ケース増増）の関数になる。つまり，関数 f_{--} が任意の $x\in X$ に対して $f_{--}(x)>0$ かつ $f_{--}'(x)<0$ かつ $d(f_{--}'(x)/f_{--}(x))/dx<0$ を満たすとすると，その負のべき乗である関数 $H(x)=(f_{--}(x))^{-n}$（$n>0$）は増加かつ変化率が逓増する：

$$H'(x)=-n(f_{--}(x))^{n-1}\cdot f_{--}'(x)>0 \text{ かつ }$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{H'(x)}{H(x)}\right)=-n\frac{d}{dx}\left(\frac{f_{--}'(x)}{f_{--}(x)}\right)>0$$

これらの結果を一つにまとめる。容易に確認できるように，（ケース増増）に当てはまる関数の負のべき乗は（ケース減減）となる。このことより，（ケース増増）→（ケース増増）となる正のべき乗は，いつでも二つの負のべき乗の合成：（ケース増増）→（ケース減減）→（ケース増増）となることが分かる[23]。よって，このケースを負のべき乗に関する結果にまとめることができる。

次いで，（ケース増減）に当てはまる関数を考える。このケースの関数は増加関数かつ変化率が逓減するようなものである。先ほどの場合と同様に，命題２の結果より，このケースに当てはまる関数の正のべき乗は（ケース増減）の関数となる。また，容易に確認できるように，このケースの関数の負のべき乗は（ケース減増）の関数となる。さらに，命題５の系として，（ケース減増）の関数の負のべき乗は（ケース増減）の関数となる。以上より，この場合にも正のべき乗はいつでも負のべき乗の合成となるために，このケースで

---

(23)　このような分解をするときには，単純に正の $n>0$ を $n=(-1)\cdot(-n)$ と因数分解するだけでも良い。

の結果を負のべき乗に関する結果にまとめることができる。

以上の議論を総括すると，関数の基本的変換の一つとして負のべき乗を考えることができて，それによって２つの遷移の系列ができあがる：

「系列Ａ」……（ケース増増）→（ケース減減）→（ケース増増）→（ケース減減）→……
「系列Ｂ」……（ケース増減）→（ケース減増）→（ケース増減）→（ケース減増）→……

このようにして，関数全体をどちらの系列に属しているのかによって２つのグループに分けることができる。よって，増加かつ変化率が逓増するような関数を見つけるためには，「系列A」 に属するような関数を一つ見つければよい。このようなまとめ方をすれば，3.3節に示した負のべき乗関数についての命題５を2.4節での諸結果と合わせて体系化できる。

ただし，増加かつ変化率が逓増するような関数の見つけ方は他にもある。3.1節の命題４によれば，（ケース増減）に当てはまる関数であっても凸関数であれば指数変換を行うことで（ケース増増）の関数が得られる。

付録．二乗した効用関数の限界効用と縁付きヘッセ行列式の符号

ここでは，ある効用関数を二乗して得られる効用関数を考える。二つの消費財，財１と２，の消費量を $x_1 \geq 0$ と $x_2 \geq 0$ とし，それらの消費から得られる効用が効用関数

$$U = U(x_1,\ x_2)$$

で表されるとする。また，効用が正 $U > 0$ であればこれを二乗した関数

$$V = (U(x_1,\ x_2))^2$$

も効用関数の単調変換なので効用関数となる。新しく得られた効用関数について限界効用を求めると

$$V_1 = 2UU_1$$
$$V_2 = 2UU_2$$

となり，その符号は任意の x_1 と x_2 についてもとの効用関数のものと一致する。ここで，記号については $V_i = \partial V/\partial x_i$，$U_i = \partial U/\partial x_i$ などの標準的な記号法に従っている。さらに，この効用関数 V については二階偏導関数：

$$V_{11} = 2(U_1^2 + UU_{11})$$
$$V_{12} = 2(U_1U_2 + UU_{12})$$
$$V_{22} = 2(U_2^2 + UU_{22})$$

が得られるために，同一の無差別曲線上で消費の組を動かしたときの限界代替率の変化は効用関数を二乗しても不変であることが分かる：

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \frac{V_{11}V_2^2 - 2V_{12}V_1V_2 + V_{22}V_1^2}{(V_2)^3} = \frac{U_{11}U_2^2 - 2U_{12}U_1U_2 + U_{22}U_1^2}{(U_2)^3} = \frac{d}{dx_1}\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$$

以上の結果より，もとの効用関数で限界効用が負となる領域では新しい効用関数でも限界効用は負となり，もとの効用関数で限界代替率が逓減しない領域では新しい効用関数でも限界代替率は逓減しないと言える。よって，限界効用の符号と限界代替率の逓減によって定義域が制限されてしまう効用関数の場合には，それを二乗することによって定義域の制限をなくすことはできないのである。

補論．上級財，下級財と限界代替率の変化

ここでは，上級財・下級財という二財の関係とそれぞれの財の消費量を変化させたときの限界代替率の変化の関連を一般的な形で示す。二つの消費財，財１と２を考える。それぞれの消費量は適当な区間に含まれる実変数 x_1 と x_2 で表され，それらの消費から得られる効用は効用関数

$$U = U(x_1,\ x_2)$$

で表される。ここでは本論と同じく基本的な前提として，一定の範囲の消費量について効用と限界効用は全て正であるとする：

$$U > 0 \text{ かつ } U_1 > 0 \text{ かつ } U_2 > 0$$

記号については $U_i \equiv \partial U/\partial x_i$ などの標準的な記号法に従っている。

良く知られているように，限界代替率は二財の限界効用の比で表される：

$$MRS_{12}(x_1,\ x_2) = -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U=const.} = \frac{U_1}{U_2}$$

これより，一方の財の消費量を固定してもう一方の財の消費量のみを変化させたときの限界代替率の変化はそれぞれ以下のようになる：

$$\frac{\partial}{\partial x_1}MRS_{12}(x_1,\ x_2) = \frac{U_{11}U_2 - U_1U_{21}}{(U_2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}MRS_{12}(x_1,\ x_2) = \frac{U_{12}U_2 - U_1U_{22}}{(U_2)^2}$$

ここで，これらの符号について2.2節の（経済学的インプリケーション）での（条件Ｆ）と（条件Ｇ）が満たされていると仮定する。すると，

（条件Ｆ）　$$\frac{\partial}{\partial x_1}MRS_{12}(x_1,\ x_2) = \frac{U_{11}U_2 - U_1U_{21}}{(U_2)^2} < 0$$

（条件Ｇ）　$$\frac{\partial}{\partial x_2}MRS_{12}(x_1,\ x_2) = \frac{U_{12}U_2 - U_1U_{22}}{(U_2)^2} > 0$$

となることから，同一の無差別曲線上で消費の組を動かしたときの限界代替率の変化は必ず逓減となる：

（条件Ａ）　$$\frac{d}{dx_1}MRS_{12}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}MRS_{12}(x_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}MRS_{12}(x_1, x_2)\frac{U_1}{U_2} < 0$$

ここでは，効用一定の条件 $dx_2/dx_1 = -(U_1/U_2) < 0$ を代入している。

さらに両財の所得効果の符号を調べる。スルツキー方程式の所得効果の項はそれぞれ以下のようになる(24)：

(24)　スルツキー方程式の所得効果の項については上級のミクロ経済学のテキスト，例えば，西村（1990）の補論3.5や Varian（1991）の8.4節などを参照のこと。

$$\frac{\partial x_1}{\partial M}=\frac{1}{\lambda D}[U_{12}U_2-U_1U_{22}]$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial M}=\frac{1}{\lambda D}[U_1U_{21}-U_{11}U_2]$$

ここで記号は，$\lambda=U_i/p_i>0$ がラグランジュ乗数，D が縁付きヘッセ行列式の正の定数倍であり，限界代替率が逓減する（効用関数が強い意味での準凹関数である）ときには D は必ず正となる。よって，（条件Ｆ）と（条件Ｇ）の下では両方の財が上級財であることが分かる。

それに対して，（条件Ｈ）と（条件Ｉ）の方が満たされていると仮定してみる。すると，

（条件Ｈ）　$$\frac{\partial}{\partial x_1}MRS_{12}(x_1,\ x_2)=\frac{U_{11}U_2-U_1U_{21}}{(U_2)^2}<0$$

（条件Ｉ）　$$\frac{\partial}{\partial x_2}MRS_{12}(x_1,\ x_2)=\frac{U_{12}U_2-U_1U_{22}}{(U_2)^2}<0$$

となることから，同一の無差別曲線上で消費の組を動かしたときの限界代替率の変化は確定しない。このことから，下級財が含まれる場合を考える際には限界代替率の逓減（条件Ａ）をさらに仮定する必要がある（ただし，この仮定を満たす領域に定義域が制限されることもあり得る）。

（条件Ａ）　$$\frac{d}{dx_1}MRS_{12}(x_1,x_2)=\frac{\partial}{\partial x_1}MRS_{12}(x_1,x_2)-\frac{\partial}{\partial x_2}MRS_{12}(x_1,x_2)\frac{U_1}{U_2}<0$$

以上の三つの条件を仮定していれば，先ほどの所得効果の項より，財１が下級財で財２が上級財となることが分かる。また容易に確認できるように，（条件Ｈ）と（条件Ｉ）での符号がともに正であるとすると，そのときには財２の方が下級財となる。

ここで，下級財の特殊ケースで，所得効果が代替効果を上回るために「需要の法則」が成立しないギッフェン財について若干触れておく。Vandermeulen（1972）が幾何学的考察によって示したように，所得効果が代替効果を上回るためには，上級財の消費量のみが増加したときの限界代替率の変化は，単に減少である（条件Ｉ）だけでなく予算制約線が縦軸上の定点 M/p_2 を中心に外側へと回転するときの相対価格の減少よりも速いペースでなければならない。よって，絶対値で

$$（条件\text{J}）\quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)=\frac{1}{x_1}<\frac{U_1U_{22}-U_{12}U_2}{(U_2)^2}=-\frac{\partial}{\partial x_2}MRS_{12}(x_1,\ x_2)$$

が満たされなければならない。このとき所得効果が代替効果を上回り，結果として財１がギッフェン財となる：

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\frac{1}{\lambda D}\Big[-(U_2)^2-x_1[U_{12}U_2-U_1U_{22}]\Big]>0$$

これが一般に下級財の“特殊”ケースと言われているギッフェン財の特殊性である。序文および以下で取り上げる例によると，この（条件Ｊ）が満たされるのは概ね消費量の領域のごく一部分であって，大域的にこの条件が満たされることは無い。つまり，下級財の中に全ての価格に対して需要曲線が右上がりとなるような特殊な財があるのではなく，ある下級財の場合にその需要曲線が右上がりとなるような特殊な部分があるのである。このことから，「ギッフェン財（Giffen good)」という言葉を使うより「ギッフェン現象(Giffen phenomenon)」とか「ギッフェン行動（Giffen behavior)」という言葉を使う方が適切であると思われる。

最後に，財１がギッフェン財となる条件（条件Ｊ）と限界代替率逓減の条件（条件Ａ）の関係を調べる。上級財の消費量のみが増加したときの限界代替率の減少には，（条件Ｊ）によって下限が，（条件Ａ）によって上限が与えられる。これらの条件と（条件Ｈ）と（条件Ｉ）の符号をまとめると，以下のようになる：

$$（条件\text{K}）\quad 0<\frac{1}{x_1}<-\frac{\partial}{\partial x_2}MRS_{12}(x_1,\ x_2)<-\frac{\partial}{\partial x_1}MRS_{12}(x_1,\ x_2)\frac{U_2}{U_1}$$

この（条件Ｋ）は，一階条件が非線形連立方程式であり明示的に解けない場合にも使えるかなり強力なものである。ここで，（条件Ｋ）の中での項の順番の意味を示す。この条件で右から二番目にある上級財の消費量のみが増加したときの限界代替率の変化 $-\partial MRS_{12}/\partial x_2$ を変数 x_2 のみの関数とすれば，それは概ね単調に変化する。そして，限界代替率の変化 $-\partial MRS_{12}/\partial x_2$ が単調に減少するか増加するかによって決まる各閾値を超える順序によって，財１がギッフェン財となるときの消費量の範囲が異なってくるのである。例えば，それが単調減少となる Vandermeulen（1972）の例では，消費量の領域は下から順に「限界代替率が逓減しない領域」,「限界代替率が逓減し財１がギッフェン財

となる領域」，に二分割される。そして二番目の領域の上側境界で下級財の限界効用がゼロとなっている（Vandermeulen（1972）Fig. 1 （p.455）を参照されたい)。Silberberg and Walker（1984）や Spiegel（1994）の例でもそれは単調減少となるので，消費量の領域は必ず下から順に「限界代替率が逓減しない領域」,「限界代替率が逓減し財１がギッフェン財となる領域」,「限界代替率が逓減し財１が下級財となる領域」に三分割される（Spiegel（1994）Fig. 1 （p.143）を参照されたい。ただし，その図の中には二番目と三番目の領域を分ける曲線は描かれていない。)。それらとは逆に，限界代替率の変化が単調に増加する Doi et al.（2009）の例では，消費量の領域は下から順に「限界代替率が逓減し財１が上級財となる領域」,「限界代替率が逓減し財１が下級財となる領域」,「限界代替率が逓減し財１がギッフェン財となる領域」,「限界代替率が逓減しない領域」に四分割される。ただし，この例では三番目の領域の中に財１の限界効用がゼロとなる曲線があるために，領域は下から三つに分類されている（Doi et al.（2009）の Fig. 3 （p.259）を参照されたい)。

本稿で研究した乗法分離型効用関数の場合には，（条件Ｋ）は上級財からの効用の変化率の逓増に限界代替率の変化と同様の下限と上限が与えられることを意味する。この場合の条件を（条件K’）とすれば，それは2.2節の（条件Ｉ）と2.3節の（条件A’）を使って以下のように書ける：

$$0<\left(\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right)\frac{1}{x_1}<\left(\frac{I'(x_i)}{I(x_i)}\right)\left[\left(\frac{S''(x_s)}{S'(x_s)}\right)-\left(\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right)\right]< -\left(\frac{S'(x_s)}{S(x_s)}\right)\left[\left(\frac{I''(x_i)}{I(x_i)}\right)-\left(\frac{I'(x_i)}{I(x_i)}\right)\right]$$

この式によると，（条件K’）が満たされるためには下級財の効用の変化率の逓減にも絶対値で見て下限があることが必要である。その制約は（条件K’）の両端にある。

参 考 文 献

〔1〕 井堀利宏（2004）「入門ミクロ経済学　第2版」新世社

〔2〕 鵜沢秀（2007）「MATHEMATICA の経済学への応用(2)　ギッフェン財をもたらす効用関数の特徴について」商学討究，小樽商科大学学術成果コレクション　第57巻4号，pp.63-101.

〔3〕 奥野正寛（編著）（2008）「ミクロ経済学」東京大学出版

〔4〕 奥野正寛，鈴村興太郎（1985）「ミクロ経済学Ｉ」岩波書店

〔5〕 神戸伸輔，賓多康弘，濱田弘潤（2006）「ミクロ経済学をつかむ」有斐閣

〔6〕 西村和雄（1990）「ミクロ経済学」東洋経済新報社

〔7〕 西村和雄（1995）「ミクロ経済学入門　第2版」岩波書店

〔8〕 藤本正樹（2009）「下級財を含む場合の効用関数と下級財や上級財の特性について」生駒経済論叢，近畿大学経済学会　第6巻3号，pp.45-61.

〔9〕 三土修平（1992）「下級財を含む効用関数の解析的定式化」経済学，愛媛大学法文学部（編）通号25，pp.19-31.

〔10〕 J. Doi, K. Iwasa, and K. Shimomura, (2009) Giffen behavior independent of the wealth level, *Economic Theory* 41: pp.247-267.

〔11〕 G. S. Epstein and U. Spiegel, (2000) A production function with an inferior input, *The Manchester School* 68: pp.503-515.

〔12〕 J-J. Laffont, (1985) *Cours de Theorie Microeconomique, Vol.2: Economie de l'Incertain et de l'Information,* Economica, Paris. 佐藤公敏訳「不確実性と情報の経済学」東洋経済新報社，1992年

〔13〕 H. H. Liebhafsky, (1969). New thoughts about inferior goods, *American Economic Review* 59: pp.931-934.

〔14〕 E. Silberberg and D. A. Walker, (1984). A modern analysis of Giffen paradox, *International Economic Review* 25: pp.687-94.

〔15〕 U. Spiegel, (1994). The case of Giffen good, *Journal of Economic Education* 25: pp.137-148.

〔16〕 U. Spiegel, (1997). The case of Giffen good: Reply, *Journal of Economic Education* 28: pp.45-47.

〔17〕 D. C. Vandermeuen, (1972). Upward sloping demand curves without the Giffen paradox, *American Economic Review* 72: pp.453-458.

〔18〕 H. R. Varian, (1991) Microeconomic Analysis, 3rd ed. Norton & Company, New York.

〔19〕 C. E. Weber, (1997). The case of the "Giffen good": Comment, *Journal of Economic Education* 28: pp.36-44.

〔20〕 C. E. Weber, (2001). A production function with an inferior input: Comment, *The Manchester School* 69: pp.616-622.

〔21〕 H. Wold and I. Jureen, (1953). *Demand Analysis,* John Wiley, New York.