生駒経済論叢　第6巻第3号　2009年3月

下級財を含む場合の効用関数と下級財や上級財の特性について

藤　本　正　樹

概要　本稿では，2財ケースで一方が上級財かつ他方が下級財であるときの，効用関数と無差別曲線の特性，および上級財と下級財の特性について研究している。それらの特性のうちで，上級財の限界効用が逓増するという点が重要ではないかと示唆している。

キーワード　下級財，上級財
原稿受理日　2008年12月18日

1. 序

現在の標準的なミクロ経済学のテキストで用いられている下級財の説明法は，大きく分ければ以下の3種類になる。第1の方法は，下級財であると通常考えられているものの具体例を示して，それへの需要が消費者の所得の増加とともに減少する理由を説明するものである。この方法は，身近に感じられる具体的なものが例として取り挙げられるだけに，直観的になんとなくそうなのだろうと納得してしまうところもあるが，その説明が正しいと確信できるだけの具体的な根拠に欠けるという短所がある。

第2の方法は，2財の場合のスルツキー方程式を導出して，各財の所得効果の符合を決定する十分条件を明示的に示すものである。この方法では，上級財と下級財とを分かつ条件が導出の手続きと共に厳密なかたちで示されるため，その結果が正しいことは確認できる。しかし，それらの条件が財の性質や消費者の消費行動とどのように関わっているのかは明らかにはならない。

第3の方法は，2財の場合での無差別曲線のグラフを使って，予算制約線の右上（あるいは左下）へのシフトによって各財への需要がどのように変化するのかを視覚的に示すやり方である。この場合，各財への需要の変化の仕方やその大きさが視覚的に示されるために，消費者の消費行動の変化を具体的に理解できたような感じを受けてしまうのだが，数学的道具立てが用いられているのにもかかわらず，スルツキー方程式を用いた解析的な方法とのつながりが見えにくい。特に，⑴スルツキー方程式による十分条件は効用関数の偏

微分によって与えられていることから，効用関数の形状についての情報を必ず含んでいるはずであり，(2)無差別曲線は，効用関数のグラフの効用水準によって引かれた等高線であり，これもまた効用関数の形状についての情報を必ず含んでいるはずであり，なおかつ，(3)下級財を含む場合の無差別曲線のグラフには，下級財の消費量の増加方向へ行くのにしたがって末広がりになっていくという際立った特徴があるのにも関わらずである。

以上に指摘したように，上記3つの方法にはそれぞれ一長一短があるのだが，複数の方法を組み合わせてみたところで，それらの実際のつながりが見えてこなければ，互いの短所を補い合わせることもできない。また，そのつながりが具体的に示されているテキストも現在は見当たらない。そこで，本稿では，2財のうち一方が下級財となりもう一方が上級財となる効用関数の例を示して，それによって3つの方法での主要内容の間のつながりを示したい。

本稿の構成は以下の通りである。先ず，第2節では，現在のミクロ経済学の標準的なテキストによる下級財と上級財の説明をまとめている。続く第3節では，スルツキー方程式を用いた下級財と上級財の十分条件を振り返り，2財のうちで一方が下級財でもう一方が上級財となる場合の効用関数の性質について検討している。そして，第4節でそのような場合の効用関数の例を提示した上で，第5節で，その例において下級財と上級財は消費者にとってどのような財であるのかということを消費行動の点から示し，さらに得られた諸結果の一般化を試みている。

2. 下級財と上級財について：再論

本節では，下級財についてテキストで行われている解説を，(1)具体例を用いた財の説明に関するものと，(2)無差別曲線を用いた幾何学的なものに分けて振り返っておく。

2.1 具体例を用いた財の説明

奥野・鈴村（1985）では，下級財の例として安いウィスキーとインスタント・コーヒーを取り上げている。そして，所得の増加にともなってそれらの財に対する需要が減少することについて以下の説明を行っている。

「所得の絶対水準が低い場合には，所得増加に伴って安いウィスキー（あるいはインスタント・コーヒー）の消費は増えようが，所得の絶対水準がある程度高まれば，もっと高級なウィスキー（あるいは本格コーヒー）へと消費を切り替え，安いウィスキー（あるいは

インスタント・コーヒー）の消費量はかえって減少するかもしれないからである。」

このような説明によって，下級財と上級財の区別を「安い・高級な」や「インスタント・本格」という形容詞によって印象付けようとしているように思われる。さらに続けて，「また，ある消費者にとっては下級財であっても，別の消費者にとっては正常財であることも，当然起こりうる。」ということを取り上げて，「正常財・下級財という性質は，決して財に固有なものではなく，消費者の嗜好に依存した概念なのである。」という結論を示している[1]。以上のような展開では，両者の区別がどのように消費者の嗜好に依存しているのかが明らかにならないだけではなく，最初の説明を読んで両者は財の性質によって区別されるのかと解釈したことが後に否定されるかたちになっているために，最終的には何も分からなくなってしまう。

上にあるカッコ内のような説明は，その他の標準的なテキストでも同様に行われている。例えば，井堀（2004, p. 86）でも，主食としての麦と米あるいは軽乗用車と普通乗用車を例に挙げて，所得が低いうちは下級財の消費をしているが，所得水準が増加するとともに，消費を上級財の方へと移していくというような展開で説明を行っている。また，神戸・寶多・濱田（2006, pp. 113–114）でも，挽いた豆を使うドリップコーヒーとインスタントコーヒーを例に挙げ，「所得が増えて前よりもお金持ちになったときに，消費量が増えるような財は上級の財と見なせるので，上級財と呼ばれるのです。」と「一方，前よりもお金持ちになったときに，消費量が減るような財は，下級の財あるいは劣っている財と見なせるので，下級財または劣等財と呼ばれます。」というふうに同様の説明が行われている。そして，そこでは，「ある財が上級財になるかそれとも下級財になるかは，財自体の性質によって決まるというよりも，消費者の選好で決まる」ということが例を挙げて強調されている。

一方，西村（1995, p. 58）では，下級財の例として焼酎，二級酒，扇風機，白黒テレビやマーガリンを使って説明している。そこでの説明では，

「ある財が下級財となりうるのは，それと代替する上級財が存在するからであることに注意してください。所得が増えているのに，第1財の需要が減少するなら，第2財の需要は増加しているはずです。また二級酒に対して一級酒，扇風機に対してルームクー

(1) 上級財と下級財の区別に消費者の嗜好（あるいは選好）の重要性を強調しているのは，次節で取り上げるスルツキー方程式による議論が念頭に置かれているのであろう。他の幾らかのテキストにおいても，この点は十分に強調されている。

ラー，白黒テレビに対してカラーテレビ，マーガリンに対してバターというように，それを代替する上級財があってこそ下級財となりうるのです。」

というふうに，下級財と上級財の間の関係が特に強調されている(2)。

2.2　無差別曲線の特徴による説明

無差別曲線のグラフを用いた，下級財と上級財がある場合の説明では，示される無差別曲線の形状に際立った特徴が見られる。現在の標準的なミクロ経済学のテキストでは，例えば，西村（1995）では，図4－10（p. 67）に財1が下級財のケースのグラフが，そして図4－11にギッフェン財であるケースのグラフが示されている。また，井堀（2004）では，図3－13（p. 86）に財1が下級財のケースのグラフが，そして図3－18（p. 94）に財2が下級財のケースのグラフが示されている。さらに，神戸・寶多・濱田（2006）でも，図11－1（p. 126）と図11－2（p. 127）に財1がギッフェン財のケースのグラフが示されている。それらのグラフに共通してみられる際だった特徴とは，無差別曲線が対角線をはさんで非対称的にゆがんだ形状をしており，しかもどの場合でも，下級財の消費量の増加・上級財の消費量の減少方向に向かって無差別曲線が広がっていっているということである。

しかしながら，一方が下級財でもう一方が上級財である場合に，なぜ無差別曲線がそのように対角線をはさんで非対称的にゆがんだ形状になるのかということについての説明は見当たらない(3)。なぜ，常に下級財の消費量の増加・上級財の消費量の減少方向に向かって無差別曲線は広がっていくのだろうか。一方が下級財で他方が上級財となる十分条件に含まれる要因のうちで，どの要因がその無差別曲線の形状に関わっているといえるのだろうか。その解析的特徴づけと幾何学的特徴づけの関係は，次節におけるスルツキー方程式による解析的特徴づけのあとに，第4節で例を用いて考察したい。

(2)　この結果は予算制約式により直ちに得られる。本稿第5.2節では，両財の間には，価格変化の影響によって定義される粗代替性の関係もあることが示される。

(3)　テキスト以外では，三土（1992）が，数値例を用いて，無差別曲線群が縦方向に先すぼまりになり，x_2 軸に近い左上に密集するようになっていれば，所得消費曲線が一定の所得以上の場合に負の傾きを持つのではないかという予想をしている。その上で，相対的リスク回避度一定の効用関数の一次結合となる加法分離的関数に対して，縦線が先すぼまりに左上へと密集するような変数変換，横軸の変数 x_1 を指数関数を使って $x_1' = x_1 \exp \theta x_2$, $(\theta > 0)$ とするもの，を行って第1財が下級財になるような効用関数を構成している。相対的リスク回避度については，Laffont（1985）を参照のこと。

3.　所得効果について：スルツキー方程式再論

本節では，西村（1990）に従って，所得効果の符号に関するスルツキー方程式を用いた議論を振り返っておく。

まず，予算制約の下での消費者の効用最大化の一階条件は，ラグランジュの未定乗数法を用いると，以下のようになる：

$$U_1(x_1, x_2) - \lambda p_1 = 0, \tag{1}$$

$$U_2(x_1, x_2) - \lambda p_2 = 0, \tag{2}$$

$$M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \tag{3}$$

ここでは，効用関数 U の偏微分（限界効用）は $U_i \equiv \partial U/\partial x_i$ というふうに略記しており，式(1)と(2)に見られる $\lambda > 0$ はラグランジュ乗数である。また，財 i $(i = 1, 2)$ の消費量を x_i，価格を p_i，そして消費者の予算を M で表しているのは通常のとおりである。さらに，両財の限界効用は正であるとしておく：$U_i > 0$ $(i = 1, 2)$。

これらの一階条件を全微分すると以下の式が得られる：

$$U_{11}dx_1 + U_{12}dx_2 - p_1 d\lambda = \lambda dp_1 \tag{4}$$

$$U_{21}dx_1 + U_{22}dx_2 - p_2 d\lambda = \lambda dp_2 \tag{5}$$

$$-p_1 dx_1 - p_2 dx_2 = -dM + x_1 dp_1 + x_2 dp_2 \tag{6}$$

ここで，所得効果を求めるために，両財の価格は変化しないものとして $dp_1 = dp_2 = 0$ とすると，式(4)から(6)までは，行列とベクトルを用いて以下のように書ける：

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -dM \end{pmatrix} \tag{7}$$

よって，クラーメルの公式を用いて連立方程式を解くと，各財の所得効果は以下のように表せる。（最後に式(1)と(2)を再び用いている。）

$$\frac{\partial x_1}{\partial M} = \frac{1}{\lambda D}(U_2 \cdot U_{12} - U_1 \cdot U_{22}), \tag{8}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial M} = \frac{1}{\lambda D}(U_1 \cdot U_{21} - U_2 \cdot U_{11}). \tag{9}$$

ここでは，偏微分の順序に関するヤングの定理により，$U_{12} = U_{21}$ となるので，当然それらの符合は一致する[4]。

これより，式(8)の右辺が正であれば第 1 財は上級財，逆に負であればそれは下級財になる。同様に，式(9)の右辺が正であれば第 2 財は上級財，逆に負であればそれは下級財になる。ここで，各財の限界効用が正 $U_i > 0$ であることにより，第 i 財の所得効果の符号は以下の式の符号に等しくなる：

$$U_i U_j \cdot U_{ij} - U_i^2 \cdot U_{jj}.$$

これについて，$i, j = 1, 2$ かつ $i \neq j$ である。

また，式(8)と(9)中の $D > 0$ は，式(7)の左辺にある行列の行列式である。この行列式 $D > 0$ の符号は，効用関数 U が強い意味の準凹関数となる（無差別曲線が原点に対して凸となる）場合に成立する。そして，第 1 財の消費量の変化が限界代替率 U_1/U_2 に与える影響を，効用一定の条件：

$$dU = U_1 dx_1 + U_2 dx_2 = 0$$

を用いて計算してみると

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{U_1}{U_2}\right) = \frac{U_2^2 \cdot U_{11} - 2U_1 U_2 \cdot U_{12} + U_1^2 \cdot U_{22}}{U_2^3}$$

となるために，限界代替率が逓減し，無差別曲線が原点に対して凸となるための十分条件は，

⑷　この定理では，U_1 と U_2 の微分可能性，U_{11}，U_{12}，U_{21} と，U_{22} の存在は仮定されるが，それらの連続性は仮定されない。高木（1983）の p. 58 を参照のこと。

$$[U_1U_2 \cdot U_{12} - U_1^2 \cdot U_{22}] + [U_1U_2 \cdot U_{12} - U_2^2 \cdot U_{11}] > 0$$

となる。容易に確認できるように，両方の財が上級財である場合にはこの条件は必ず満たされる。しかし，下級財が含まれる場合には，一方が下級財になる条件よりも，限界代替率逓減の方がより制約的な条件である。よって，一方の財が下級財になる場合には，限界代替率逓減の条件によって効用関数の定義域や，あるいはそのパラメータに一定の制約が課されることもあり得るだろう。

以上より，⑴第1財が下級財，⑵第2財が上級財で，⑶無差別曲線が原点に対して凸となるという全ての条件が満たされる可能性のある場合を列挙すると，以下の表のようになる：

	U_{11}	$U_{12}=U_{21}$	U_{22}
ケース1	(+)	(+)	(+)
ケース2	(−)	(+)	(+)
ケース3	(−)	(−)	(+)
ケース4	(−)	(−)	(−)
ケース5	(−)	(−)	0
ケース6	(−)	0	(+)
ケース7	0	(+)	(+)

ここで，効用関数の通常の仮定（単調増加性と凹性）が満たされているものとしてみよう（上のケース4）。すると，第1財が下級財である場合には，式⑻と効用関数の凹性により，

$$U_2 \cdot U_{12} < U_1 \cdot U_{22} < 0.$$

となるので，一方の限界効用が他方の消費量の増加とともに減少し，両財は代替的 $U_{12} < 0$ となるはずである。もしそうではなく，両財が補完的な関係 $U_{12} > 0$ にあるとすれば，上式によると，第2財（上級財）の限界効用は逓増することになり，通常の仮定は満たされないことになる（上のケース1，2または7）[5]。2つの財の間に下級財と上級財という区別ができるのは，両財が互いに他方の限界効用を減少させ合うような代替的な関係にあるこ

⑸　ここでいう補完的・代替的というのは，通常のように代替効果の符号によって定義されるものではなく，限界効用を用いたエッジワース・パレートによる古典的なものである。この古典的な定義では，基数的効用が前提とされているために今日では余り用いられていないのだが，ここではあくまで便宜的に用いている。太田（1980, p. 176）を参照のこと。

とからなのか，それとも，上級財に限界効用逓増という特別な性質があるからなのだろうか。

少なくとも，⑴効用関数が加法分離的である（第 1 財から得られる効用と第 2 財から得られる効用が互いに独立となる）場合を考えると，交叉偏微分は常にゼロであるので，代替的 $U_{ij} < 0$ となることはない（この場合はケース 6 となる)。そして，⑵効用関数が乗法分離的である（得られる総効用が第 1 財からのものと第 2 財からのものの積となる）場合には，両財の限界効用が正である限りにおいて代替的 $U_{ij} < 0$ となることはない（この場合はケース 1，2，7 のいずれかとなる)。従って，もっともらしい効用関数の範囲に限っていえば，後者の可能性の方がよりあり得るものと考えられる。

現時点では，「両財の限界効用が正であり $U_1 > 0, U_2 >$ かつ財が代替的 $U_{12} < 0$ となる」ケース 3 と 4 と 5 の適切な具体例が見つからないために，以下の議論では対象をケース 1，2 と 7 に限定していく。代替的な場合の具体例は将来的な課題である。

4. 効用関数の例

4.1　例

梅原（2004）の第 3 章補論 2 においては，第 1 財がギッフェン財となる場合の効用関数として，以下の形状のものが取り上げられている。

$$U = \frac{x_1 - 10}{(-x_2 + 20)^2},$$

$x_1 \in [0, 50]$ かつ $x_2 \in [0, 25]$。しかし，この効用関数をそのまま用いると，第 1 財からの効用が負になる場合や，分母がゼロになる場合などの不合理な状況が存在してしまう。

そこで，それらの状況を排除するために，この効用関数を以下のように修正してみる。

$$U = \frac{x_1}{(-x_2 + 21)^2},$$

$x_1 \in [0, 20]$ かつ $x_2 \in [0, 20]$。この効用関数について，以下の諸結果が得られる。第 1 財についての偏微分は，

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{(-x_2+21)^2} > 0, \\
U_{11} &= 0, \\
U_{12} &= \frac{2}{(-x_2+21)^3} > 0,
\end{aligned}
$$

そして，第 2 財についての偏微分は，

$$
\begin{aligned}
U_2 &= \frac{2x_1}{(-x_2+21)^3} > 0, \\
U_{22} &= \frac{6x_1}{(-x_2+21)^4} > 0, \\
U_{21} &= \frac{2}{(-x_2+21)^3} > 0,
\end{aligned}
$$

となる。

これらより，第 1 財の所得効果の符号は，

$$
\frac{\partial x_1}{\partial M} = \frac{1}{\lambda D}(U_2 \cdot U_{12} - U_1 \cdot U_{22}) = \frac{1}{\lambda D}\frac{-2x_1}{(-x_2+21)^6} < 0
$$

そして，第 2 財の所得効果の符号は，

$$
\frac{\partial x_2}{\partial M} = \frac{1}{\lambda D}(U_1 \cdot U_{21} - U_2 \cdot U_{11}) = \frac{1}{\lambda D}\frac{2}{(-x_2+21)^5} > 0
$$

となる。つまり，第 1 財が下級財，第 2 財が上級財となる。（第 1 財が上級財で第 2 財が下級財となる場合を考えるには，下添え字 1 と 2 を入れ替えればよい。）

この場合には，スルツキー方程式による条件が，

$$
\begin{aligned}
&U_2 \cdot U_{12} - U_1 \cdot U_{22} = (+) \cdot (+) - (+) \cdot (+) < 0, \\
&U_1 \cdot U_{21} - U_2 \cdot U_{11} = (+) \cdot (+) - (+) \cdot 0 > 0
\end{aligned}
$$

というかたちで満たされている（これは前節のケース 7 にあたる）。

4.2　若干の一般化

ここからは，上記のものを特殊ケースとして含む乗法分離的な効用関数のクラスで，同様の結果が得られるものを示す。以下の効用関数を考えよう：

$$U = x_1^m (y - x_2)^{-n},$$

ここで，パラメータはともに正 $m > 0$ と $n > 0$ であり，変数の定義域は $0 < x_1$，$0 < x_2 < y$ とする。

このとき，以下の諸結果を得る。まず，どちらの財の限界効用も正であり：

$$U_1 = m x_1^{m-1} (y - x_2)^{-n} > 0, \tag{10}$$

$$U_2 = n x_1^m (y - x_2)^{-n-1} > 0 \tag{11}$$

となる。そして，これらの式より，

$$U_{12} = mn x_1^{m-1} (y - x_2)^{-n-1} > 0,$$

$$U_{22} = n(n+1) x_1^m (y - x_2)^{-n-2} > 0,$$

が得られる。従って，第 1 財の所得効果 $\partial x_1/\partial M$ は負となる（第 1 財は下級財）：

$$U_2 \cdot U_{12} - U_1 \cdot U_{22} = [mn^2 - mn(n+1)] x_1^{2m-1} (y - x_2)^{-2n-2} < 0. \tag{12}$$

他方で，式(11)と(10)から，

$$U_{21} = mn x_1^{m-1} (y - x_2)^{-n-1} > 0,$$

$$U_{11} = m(m-1) x_1^{m-2} (y - x_2)^{-n}, \tag{13}$$

となることから，第 2 財の所得効果 $\partial x_2/\partial M$ は正となる（第 2 財は上級財）：

$$U_1 \cdot U_{21} - U_2 \cdot U_{11} = [m^2 n - m(m-1)n] x_1^{2m-2} (y - x_2)^{-2n-1} > 0. \tag{14}$$

となる。ここでの場合は，パラメータ m の値によって，前節で分類したのうちでケース１（$m>1$），ケース２（$0<m<1$）またはケース７（$m=1$）のそれぞれにあたる。

さらに，限界代替率逓減の条件 $U_1^2\cdot U_{22}+U_2^2\cdot U_{11}-2U_1U_2\cdot U_{12}<0$ は：

$$[m^2n(n+1)+m(m-1)n^2-2m^2n^2]x_1^{3m-2}(y-x_2)^{-(3n+2)}<0$$

となることより，パラメータの関係に一定の制約 $m<n$ が課されることになる。

以上の結果より，２財のケースで，無差別曲線が，横軸に消費量がとられる第１財（下級財）の消費量の増加・縦軸に消費量がとられる第２財（上級財）の消費量の減少方向（つまり右下方向）へ向かって末広がりとなっている理由が分かる。上の結果によると，第１財が下級財になる十分条件⑿が満たされる要因のうちで，⑴上級財の限界効用が逓増すること $U_{22}>0$ と，⑵下級財の限界効用 U_1 が上級財の消費量 x_2 の増加とともに逓増すること $U_{12}>0$ が重要であると考えられる。なぜなら，そのような場合には，効用曲面は，左上方向から右下方向へと，右上の１点を中心にして回転するように滑り降りていくのに従ってなだらかとなっていくからである。その結果として，無差別曲線（効用曲面の等高線）はその方向へと向かって末広がっていくのである。これらの特徴は，効用関数のグラフとその上に描かれる補助線を実際に見てみれば，よりいっそうはっきりとしてくるだろう。

以下において，グラフの一例を示しておく。図１はパラメータが $y=21$ かつ $m=1$ と

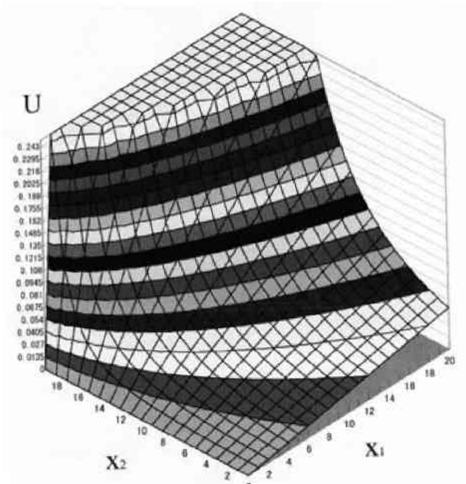

図１　m＝１，n＝２，の場合

$n=2$ で第１財の限界効用が一定の場合（ケース７）の効用関数のグラフであり，図２はその場合の無差別曲線（太線）と予算制約線，さらに所得消費曲線（破線）のグラフである。

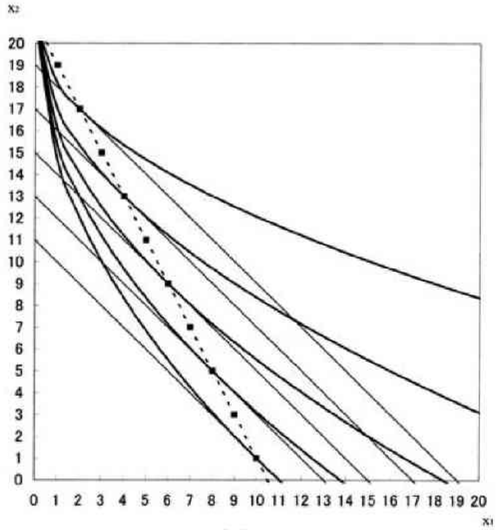

図２　所得消費曲線（破線）

以上に指摘された２要因のうちで，１番目の「(1)上級財の限界効用が逓増的 $U_{22}>0$ である」の方がより重要なものであるのかもしれない。なぜならば，それ以外の要因が無くても同じ結果が得られる場合が存在するからである。例えば，加法分離的効用関数の場合では交叉偏微分 $U_{ij}(i \neq j)$ は全てゼロであるが，下級財の限界効用が逓減し上級財の限界効用が逓増しさえすれば，条件(12)と(14)は満たされて同様の結果が得られる（前節のケース６）。そして，ここで考えた乗法分離的な例では式(13)の符号に制約は無く，下級財の限界効用は逓減的にも，一定にも，逓増的にもなり得るのだ。

5.　消費者行動へのインプリケーション

5.1　具体例による導出

ここからは，前節の乗法分離的効用関数：

$$U=x_1^m(y-x_2)^{-n},$$

を用いて，下級財と上級財がある状況での消費者の最適行動を示す。そして，そこで得られた結果によって下級財や上級財の性質を探っていく

消費者にとっての予算制約式は，第 i 財の価格を $p_i(i=1,2)$，消費者の予算を M とすれば，通常どおり

$$p_1x_1+p_2x_2=M \tag{15}$$

となる。ここで，内点解を得るために，効用関数のパラメータについて $m<n$ を，また，消費者の購買力について $my/n<M/p_2<y$ を仮定しておく。

ここで，限界代替率は：

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{m}{n}\frac{y-x_2}{x_1}$$

であることから，効用最大化の条件（限界代替率＝財の相対価格）と予算制約式⒂によって求められる 2 財の需要関数は：

$$x_1=\frac{m}{n-m}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(y-\frac{M}{p_2}\right),$$

$$x_2=\frac{n}{n-m}\left(\frac{M}{p_2}-\frac{m}{n}y\right)$$

となる。

内点解を得るために，消費者の第 2 財の価格で測った購買力 M/p_2 についての仮定を置いたが，ここでその意味がはっきりする。つまり，第 2 財の価格で測った購買力が先の仮定が満たされないぐらいに低くなってしまうと，上級財の消費量はゼロとなってしまう。逆に，その購買力が先の仮定が満たされないぐらいに高くなってしまうと，今度は第 1 財の消費量の方がゼロとなってしまうのである。

以上の需要関数から得られる結果を列挙しておく。これらの結果によって，下級財と上級財の対称的な性質がうかがえよう。

1. 第 1 財（下級財）への需要は，その価格 p_1 の上昇や予算 M の増加によって減少し，第 2 財（上級財）の価格 p_2 の上昇によって増加する（つまり，第 1 財は第 2 財の粗代替財である）。また，下級財への支出額 p_1x_1 は，その財の価格の変化によっては変化しないが，上級財の価格の上昇（低下）によって増加（減少）する。つまり，下級財

の消費は，上級財の価格から大きな影響を受けており，下級財の価格が低下したとしてもそれへの支出額が増加するまでは消費を増やそうとはしないが，上級財の価格が上昇したときには，下級財への支出額を増加させる。

2. 上級財への需要は，その価格の上昇によって減少し，予算の増加によって増加するが，下級財の価格の変化によっては影響を受けない。また，上級財への支出額はその財の価格の上昇（低下）によって減少（増加）するが，下級財の価格の変化によっては全く影響を受けない。先の結果とは対称的に，上級財の消費に下級財は全く関係していない。
3. それらの結果を合わせると以下のことが言える。上級財の価格の上昇に対しては，消費者は上級財をあきらめてそれへの支出を減少させて，その代わりに下級財への支出額を増加させることで対応する。逆に，上級財の価格が低下したときには，下級財への支出額を減少させてでも，上級財の消費を増加させる。
4. 下級財に対する支出割合（エンゲル係数）p_1x_1/M は，予算額Mの増加と共に減少する。それに対して，上級財のエンゲル係数 p_2x_2/M は，予算額の増加と共に増加する。つまり，消費者は，豊かになればなるほど予算のうちのより多くを上級財の消費に費やそうとする。

以上の結果は以下の指数によっても確認できる。仮定 $my/n < M/p_2 < y$ のもとで両財の価格弾力性と所得弾力性を求めると，第1財については：

$$-\frac{p_1}{x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = 1,$$

$$\frac{M}{x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial M} = \left(1 - \frac{p_2 y}{M}\right) < 0,$$

が得られる。価格弾力性の値によって示されているように，第1財への支出額は価格の変化によらない。そして，所得弾力性が1を下回っていることから，これは必需品となっている。

そして，第2財については，

$$-\frac{p_2}{x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial p_2} = \left(1 - \frac{m}{n}\frac{p_2 y}{M}\right)^{-1} > 1,$$

$$\frac{M}{x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial M} = \left(1 - \frac{m}{n}\frac{p_2 y}{M}\right)^{-1} > 1.$$

が得られる。最初の式により，第 2 財の需要は価格の変化に対して弾力的であり，それへの支出額が価格の上昇（低下）によって減少（増加）するものであることが分かる。そして，2 番目の式で所得弾力性が 1 よりも大きいことから，所得の増加にともなってエンゲル係数が増加するような奢侈品であるということが示される⑹。

これらの結果を見てみると，⑴スルツキー方程式による方法で「所得効果の符号が負になる」というふうに解析的に特徴付けられ，なおかつ，⑵無差別曲線が下級財の消費量の増加方向へと末広がりになるというふうに幾何学的に特徴付けられるような効用関数によって，下級財と上級財の性質や関係についてもっともらしい結論が得られるのだと感じられる。ただし，言うまでもなく，効用関数の特性（消費者の嗜好）と下級財や上級財に関する結果の関係は一般化される必要がある。

5.2 諸結果の一般化

以下で結果の一般性について論じていく。先ず，下級財が上級財の粗代替財であるという結果は，以下に示されるように，第 3 節のスルツキー方程式に関する議論によって確認できる：

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{1}{\lambda D}[U_1 \cdot U_2 - x_2(U_2 \cdot U_{12} - U_1 \cdot U_{22})] > 0. \tag{16}$$

これは第 3 節の式⑷から⑹を第 1 財の価格一定 $dp_1 = 0$ と予算一定 $dM = 0$ の条件の下で解いたものである。右辺の符号は，両財の限界効用が正であることと第 1 財が下級財であること（第 2 項のカッコ内が負）よりいえる（あわせて式⑻を参照のこと）。

また，この結果は式⒃のような計算式を用いない幾何学的な観点からも説明できる⑺。第 1 財の価格 p_1 が一定で第 2 財の価格 p_2 が上昇する場合には，相対価格 p_1/p_2（予算制約線の傾き）が低下することから，代替効果によって必ず第 1 財への需要 x_1 が増加する（式⒃の四角カッコ内の第 1 項が正となる部分）。これは，無差別曲線が原点に対して凸である限りは接線の傾きの低下によって主体的均衡点（効用が最大となる消費量の組）が同一無差別曲線上で右下へと移動することによりいえる。そして，下級財への需要 x_1 は財の

⑹ 需要の所得弾力性とエンゲル係数の関係については，例えば，奥野・鈴村（1985）の pp. 168–170 を参照されたい。

⑺ スルツキー方程式を用いて，ここでの幾何学的説明を確認する場合には，本稿で示されているバージョンよりも，Mckenzie（1957）によって双対性を利用して導出されたバージョンの方が良い。後者のバージョンについては，西村（1990, p. 59）を参照されたい。

価格 p_2 の上昇による実質所得の減少により増加することから，必ず増加するのである（式⑯の四角カッコ内の第2項が正となる部分)。以上のことにより，代替効果と所得効果の結果として，第2財の価格 p_2 の上昇は第1財への需要 x_1 を必ず増加させるのである。

そして，下級財の価格 p_1 が一定であるときには，上級財の価格 p_2 の上昇によって下級財の需要 x_1 が増加するという結果は，その価格の上昇によって下級財への支出額 p_1x_1 も増加するということを意味する。

$$\frac{\partial\left(p_1x_1(p_1,p_2,M)\right)}{\partial p_2}>0.$$

よって，選択の対象が2財だけの場合では，上級財への支出額はその価格の上昇によって必然的に減少するのだということが言える。つまり，予算制約式が

$$p_1x_1(p_1,p_2,M)+p_2x_2(p_1,p_2,M)=M$$

であることから，この式の両辺を第2財の価格 p_2 で偏微分することにより

$$\frac{\partial\left(p_1x_1(p_1,p_2,M)\right)}{\partial p_2}=-\frac{\partial\left(p_2x_2(p_1,p_2,M)\right)}{\partial p_2}>0. \tag{17}$$

を得る。

以上の結果から，上級財（第2財）の価格弾力性が1よりも大きくなることが分かる。つまり，式⒄の右辺にある結果は

$$x_2(p_1,p_2,M)+p_2\frac{\partial x_2(p_1,p_2,M)}{\partial p_2}<0$$

を意味することにより，第2財の需要の価格弾力性について，以下の結果：

$$-\frac{p_2}{x_2(p_1,p_2,M)}\cdot\frac{\partial x_2(p_1,p_2,M)}{\partial p_2}>1.$$

を得る。

また，エンゲル係数についての結果は，下級財への支出割合（エンゲル係数）が予算の増加にともなって減少する場合，2財の場合であると，必然的にもう一方（上級財）への支出割合が増加することから一般的に成立することが分かる。つまり，予算制約式により

$$\frac{p_1x_1(p_1,p_2,M)}{M}+\frac{p_2x_2(p_1,p_2,M)}{M}=1$$

となることから，この式の両辺を予算 M によって偏微分することにより，

$$0>\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{p_1x_1(p_1,p_2,M)}{M}\right)=-\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{p_2x_2(p_1,p_2,M)}{M}\right)$$

という結果を得る。

本稿で示された諸結果によって，下級財と上級財は以下のように定義できる：

定義：

1. 下級財　所得効果が負であり，上級財の粗代替財であり，エンゲル係数が所得の増加とともに減少するような財である(8)。
2. 上級財　所得効果が正であり，その限界効用が逓増し，需要の価格弾力性が1よりも大きく（需要が弾力的），エンゲル係数が所得の増加とともに増加するような奢侈品（需要の所得弾力性が1よりも大きい）である。

このような定義を踏まえて考えてみると，下級財と上級財の具体例として使われるのにふさわしいといえる財は何と何であろうか？

参　考　文　献

〔1〕　井堀利宏（2004）「入門ミクロ経済学　第2版」新世社
〔2〕　梅原嘉介（2004）「Excel ミクロ経済学入門」工学社
〔3〕　太田　誠（1980）「2消費者行動」，経済学大事典Ⅰ，pp. 167–180. 東洋経済新報社
〔4〕　奥野正寛，鈴村興太郎（1985）「ミクロ経済学Ⅰ」岩波書店
〔5〕　神戸伸輔，寳多康弘，濱田弘潤（2006）「ミクロ経済学をつかむ」有斐閣
〔6〕　高木貞治（1983）「解析概論　改訂第三版」岩波書店
〔7〕　西村和雄（1990）「ミクロ経済学」東洋経済新報社
〔8〕　西村和雄（1995）「ミクロ経済学　第2版」岩波書店
〔9〕　三土修平（1992）「下級財を含む効用関数の解析的定式化」経済学　愛媛大学法文学部（編）通号25，pp. 19–31.
〔10〕　J-J. Laffont, (1985), Cours de Théorie Microéconomique, Vol. 2 : Economie de l'Incertain et de l'Information, Economica, Paris. 佐藤公敏訳「不確実性と情報の経済学」東洋経済新報社，1992年
〔11〕　L. Mckenzie, (1957), Demand theory without utility index, *Revew of Economic Studies* 24, pp. 185–189.

(8)　常に対称的である代替効果によって定義される代替財の場合とは違い，代替効果と所得効果の合計によって定義される粗代替財の場合は，関係が非対称的になりうる。つまり，第1財が第2財に対する粗代替財であっても，逆に第2財が第1財に対する粗代替財である必然性はないのである。この点については奥野・鈴村（1985）の pp. 202–203 を参照されたい。