



## 循環過程と Hopf 分岐

内 上 誠

**概要** 現実の経済の様相は、循環過程において大きく変化しているように見受けられる。拡張過程では、緩やかな景気回復が一変し、活発な活動を伴う好況期へと続く。収縮過程では後退期に比べものにならない不況期の落ち込みを経験する。このことは拡張過程および収縮過程において経済が大きく変貌を遂げていると見ることも出来る。本稿ではこのような経済の様相の変化の原因を、経済の安定・不安定の交替に求めた。Hopf 分岐を応用し、モデル分析を通して循環過程上で安定であった経済が不安定に、不安定である経済が再び安定へと変化する経済を提示することを目的とする。

**キーワード** Hopf 分岐, 安定・不安定軌道, 最適在庫ストック, 現実の在庫ストック, 生産調整係数

**原稿受理日** 2009年5月13日

**Abstract** Economic activities are taking on different aspects in the course of the business cycle. During the recovery aspect, for example, economic activity is moderate. On the other hand, it is followed by brisk business activities during the prosperity aspect. In this paper, I have proposed a model that will account for such a situation. For this purpose, I applied the Hopf bifurcation by which enables the explanation of the cause of the change from a stable orbit to unstable one.

**Key words** Hopf Bifurcation, Optimal Inventory Stock, Actual Inventory Stock, Stable and Unstable Orbits, Production Adjustment Coefficient

## 1. はじめに

現実の景気循環の過程を観察すると、拡張過程においても収縮過程においても経済の様相が変化しているように見受けられる。穏やかな景気回復に対し活発な好況期、緩やかな景気後退期に続く激しく衰退する不況期。1つの過程の中でも経済は大きく変化しているように思われる。本稿ではこのような変化を、経済の安定から不安定へ交替、不安定から安定への移行と捉え、Hopf 分岐を用いて、モデルによってその可能性を明らかにしようとするものである。

また、分岐理論を用いる場合、パラメータは外生的に与えられる。本稿ではパラメータとして生産調整係数を用い、内生化する試みをしている。

## 2. モデルと仮定

### 2.1. 生産調整と意図された在庫投資

生産は需要を反映して調整されるものとする。需要は、意図された在庫投資  $z$  を被乗数として、乗数を通して瞬間的に形成されるものとする。そこでこのような乗数過程を関数  $f$  によって表す。生産の（次期）調整は今期の事前的な需要と今期の事前的な生産計画  $Y$  とのギャップを指標として行われるものとする。

$$\dot{Y} = \alpha f(z) - Y \quad (1)$$

ただし、需要側に生産調整係数  $\alpha (> 0)$  を掛けている。これは、在庫ストックの状況などによって、今期の事前的需給ギャップの一部のみ次期の生産に反映させる場合 ( $\alpha < 1$ ) もあれば、すべて ( $\alpha = 1$ )、またはそれ以上 ( $\alpha > 1$ ) に次期の生産調整に反映させることがあるためである。

一方、意図された在庫投資は、意図された現存在庫ストックを最適在庫ストック水準  $Z^*$  に調整するように行われるものとし、簡単化のため次式を想定する。

$$z = g(Y, Z) = Z^*(Y) - Z \quad (2)$$

$Z^*$  が生産の関数であることは節2.3において説明される<sup>(1)</sup>。  $Z^*(Y) - Z < 0$  の場合には、意図的に在庫ストックを放出して需要に対応することを表す。

意図された在庫投資は意図された在庫ストックの増分であるため、意図された在庫ストックの挙動は、

$$\dot{Z} = g(Y, Z) = Z^*(Y) - Z \quad (3)$$

に従う。同様にして、(2)を用いると(1)は(4)と置きなおすことができる。

$$\dot{Y} = \alpha f(Y, Z) - Y \quad (4)$$

これら(3)(4)が基本の式となる。

## 2.2. 費用関数について

最適な在庫ストック水準は常に一定であるとは考えにくい。最適在庫ストック水準がどのような水準に決まるのかを考えるために、企業の利潤最大化という側面から考察することとする。つまり利潤の割引現在価値を最大化するように企業は最適在庫ストック水準を決定するものとする。

企業は生産に伴う費用  $C(Y)$  とともに在庫ストック保有に対する費用  $h(Z)$  も発生する。企業にとって在庫ストックを保有することは、取引コストを低下させたり、予想されていなかった需要の増加に対応することができ、収益増加の機会を逃さずに済むというメリットがある。けれども反面、在庫保有に伴う費用も発生する。この関係は通常、U字形の費用関数で表される<sup>(2)</sup>。図1において、最も費用が低い水準を  $A$  とすると、  $0 < Z < A$  の範囲では、保有量が少ないところではストックアウトに伴う費用が発生するが、保有量の増加とともに、在庫保有のメリットが高くなり始める。  $A < Z < \infty$  の範囲では在庫保有に伴う在庫維持費用が上昇しだすことを表している。

(1) 拙著 [2002] pp. 13-18.

(2) 小谷 [1987] p. 58 および p. 60.

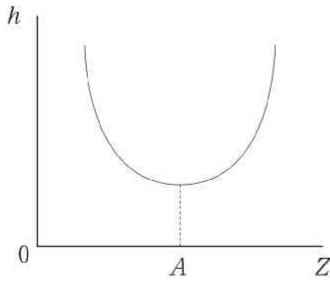


図1<sup>(3)</sup>

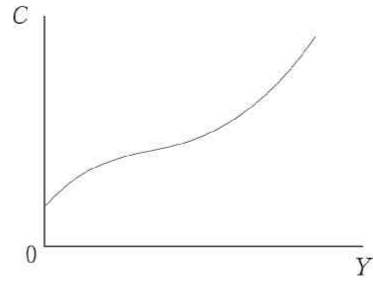


図2

ここでは、このような形の費用関数を想定した下で、最適在庫ストック水準を求める。企業は現在から将来にかけて発生する利潤の割引現在価値  $V$  を最大にするように行動するものとする。

$$\max V = \int_0^{\infty} [pY - C(Y) - h(Z)] e^{-\theta t} dt \quad (5)$$

$p$  は価格を表し、一定と仮定する。 $\theta$  は割引率を表し、 $0 < \theta < 1$  とする。生産から発生する費用については、基礎的なミクロ経済学のテキストと同様に、生産に対して右上がりの費用関数とし、次のような性質を持つものとする（図2）。

$$\begin{aligned} C(0) = a > 0, \quad C_Y(Y) > 0 \text{ for } 0 \leq Y < \infty, \quad C_{YY}(Y) < 0 \text{ for } 0 \leq Y < Y_0 \\ C_Y(Y) > 0 \text{ for } Y_0 \leq Y, \quad C_{YY}(Y) > 0 \text{ for } 0 \leq Y < \infty \end{aligned} \quad (6)$$

$a$  は定数。ただし  $Y = 0$  における限界費用は価格よりも低いものとする。

在庫ストック保有に伴う費用関数は、先述のように考えると、

$$\begin{aligned} h(Z) > 0 \text{ for } 0 < Z < \infty, \\ h_Z(Z) < 0 \text{ for } 0 < Z < A, \quad h_Z(Z) = 0 \text{ for } Z = A, \quad h_Z(Z) > 0 \text{ for } A < Z < \infty, \\ h_{ZZ}(Z) > 0 \text{ for } 0 < Z < \infty, \end{aligned}$$

(3) 本稿における図はすべて筆者による。

と表すことができる。

### 2.3. 最適在庫ストック水準の決定

この節では、最適在庫ストック水準がどのようにして決まるかを考察する。そこで以下では、企業が利潤の割引現在価値を最大にするように行動すると仮定した下で、最適在庫ストック水準が生産量に依存することを示す。

(5)および(3)を用いてハミルトン関数  $H$  を作ると、

$$H = [pY - C(Y) - h(Z)]e^{-\theta t} + \mu(Z^*(Y) - Z) \quad (7)$$

となる。ここで  $\mu = \lambda \exp(-\theta t)$  とすると、

$$H = [pY - C(Y) - h(Z) + \lambda(Z^*(Y) - Z)]e^{-\theta t} \quad (8)$$

を得る。ただし、 $\mu$ 、 $\lambda$  は未定乗数を表す。(8)より最大化の1階条件は、

$$\frac{\partial H}{\partial Y} = p - C_Y + \lambda Z_Y^* = 0 \quad (9)$$

$$\lambda = [C_Y - p] / Z_Y^* \quad (10)$$

$$\dot{\lambda} = (1 + \theta)\lambda + h_Z \quad (11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t Z_t^* = 0 \quad (12)$$

となる。(12)は横断条件である。(10)を時間微分すると、

$$\dot{\lambda} = \frac{[C_{YY}Z_Y^* - (C_Y - p)Z_{YY}^*]\dot{Y}}{(Z_Y^*)^2} \quad (13)$$

となるため、(10)を用いて、(11)を代入し整理すると、

$$\dot{Y} = \frac{[(1 + \theta)(C_Y - p) + h_Z Z_Y]Z_Y^{*2}}{C_{YY}Z_Y^* - (C_Y - p)Z_{YY}^*} \quad (14)$$

となり、この(14)がゼロとなるためには、

$$Z_Y^* = \frac{(1+\theta)[C_Y - p]}{-h_Z} \tag{15}$$

を得る。(15)については、 $h_Z < 0$  の範囲と  $h_Z > 0$  の範囲に分けて考える。

【 $h_Z < 0$  について】

$h_Z < 0$  であるため(15)の分母はプラスである。分子は生産の限界費用の仮定と価格から符号が決まる。限界費用と価格が一致する点の生産量を  $Y_0$  とすると、 $Z_Y^*$  の値は、

$$\text{minus}(-) \text{ for } 0 \leq Y < Y_0, \text{ zero}(0) \text{ for } Y = Y_0, \text{ plus}(+) \text{ for } Y_0 < Y$$

となる。したがって Y-Z 平面上では図 3-1 となる。

【 $h_Z > 0$  について】

この範囲における  $Z_Y^*$  の値は、

$$\text{plus}(+) \text{ for } 0 \leq Y < Y_1, \text{ zero}(0) \text{ for } Y = Y_1, \text{ minus}(-) \text{ for } Y_1 < Y$$

となり、Y-Z 平面上の形は図 3-2 のようになる。

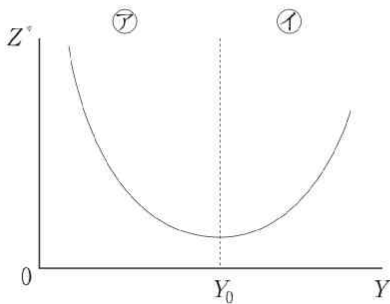


図 3-1

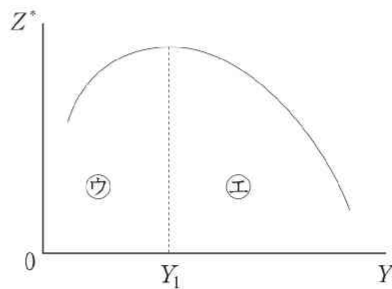


図 3-2

### 3. Hopf 分岐

#### 3.1. 特性方程式

(2)(4)による基本となる体系を再述すると,

$$\dot{Y} = \alpha f(Y, Z) - Y \quad (4)$$

$$\dot{Z} = Z^*(Y) - Z \quad (2)$$

である。これより特性方程式を求めると,

$$\begin{vmatrix} (\alpha f_Y - 1) - \lambda & \alpha f_Z \\ Z_Y^* & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\alpha f_Y - 2)\lambda + [(1 - \alpha f_Y) - \alpha f_Z Z_Y^*] = 0 \quad (16)$$

を得る。(16)において,

$$\alpha f_Y \equiv \alpha \frac{\partial f}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial Y} \equiv \frac{\partial f}{\partial Z^*} \frac{\partial Z^*}{\partial Y}, \quad \alpha f_Z Z_Y^* \equiv \alpha \frac{\partial f}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial Z} \frac{\partial Z^*}{\partial Y} \equiv -\alpha \frac{\partial f}{\partial Z^*} \frac{\partial Z^*}{\partial Y}$$

であるので,  $h_Z$  の正負, したがって  $Z_Y^*$  の正負に関係なく, 常に,

$$Det = 1 \quad (17)$$

である。それゆえ均衡点が saddle point であるケースは発生しない。ただし,

$$\frac{\partial Z}{\partial Z} = -1 < 0, \quad \frac{\partial f}{\partial Z^*} = const. > 0 \quad (18)$$

である。 $\partial f / \partial Z^*$  は乗数値を表すため, プラスの一定値を持つ。

トレース  $Tr$  については,  $h_Z < 0$  の範囲と  $h_Z > 0$  の範囲に分けて考察する。

#### 【 $h_Z < 0$ の範囲】

$Tr < 0$  であるためには,

$$-\infty < \alpha f_Y < 2 \quad (19)$$

でなくてはならない。

$$\alpha f_Y \equiv \alpha \frac{\partial f}{\partial Z^*} \frac{\partial Z^*}{\partial Y} \equiv \alpha \frac{\partial f}{\partial Z^*} Z_Y^*$$

であるから、右辺の  $Z_Y^*$  がマイナス値全体からプラス値 2 未満の範囲で  $Tr < 0$  となる。

図 3-1 において、この条件を満たす領域はアとイの前半部分である。

他方、 $Tr \geq 0$  である範囲は、

$$2 \leq \alpha f_Y \tag{20}$$

であり、図 3-1 において領域イの後半部分がこの条件を満たす。

#### 【 $h_Z > 0$ の範囲】

やはりこの領域でも  $Tr < 0$  である条件は同じく  $-\infty < \alpha f_Y < 2$  であり、 $Tr \geq 0$  である範囲も同様に、 $2 \leq \alpha f_Y$  である。図 3-2 では  $Tr < 0$  である範囲はウの後半からエ領域であり、 $Tr \geq 0$  であるのはウの前半部分である。

### 3.2. Hopf 分岐の存在の可能性のある領域

ところで  $h_Z < 0$  と  $h_Z > 0$  において、 $Tr < 0$  の領域では Hopf 分岐が存在する可能性がある。

Hopf 分岐が存在する条件としては  $Det > 0$ 、 $Tr < 0$  である必要があるが、本稿のモデルでは、 $h_Z < 0$  と  $h_Z > 0$  の両領域において  $Det = 1 > 0$  であり、かつ(19)の範囲内で  $Tr < 0$  も満たしている。

いま、(16)を、

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$$

と置きなおすと<sup>(4)</sup>、

---

(4) Lorenz [1989] pp. 76-83, Gandolfo [1997] pp. 477-480.



$$\begin{aligned} a_1 &= -Tr = -(\alpha f_Y - 2) = 2 - \alpha f_Y \\ a_2 &= Det = (1 - \alpha f_Y) - \alpha f_Z Z_Y^* = 1 \end{aligned} \tag{21}$$

となる。 $a_1 = 0$  として、 $\alpha$  の規準となる値  $\alpha_0$  を求めると、 $\alpha_0 = 2/f_Y$  となるので、

$$\begin{aligned} a_1 &\leq 0 \text{ for } \alpha \geq \alpha_0 \\ a_1 &> 0 \text{ for } \alpha < \alpha_0 \end{aligned}$$

という関係が成立する。根は、

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}]$$

であるが、 $\alpha = \alpha_0$  において  $a_1 = 0$  であるから、

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a_2} = \pm \sqrt{-1}$$

である。また、次の条件を満たすためには、たとえば、

$$\frac{d - \frac{1}{2} a_1}{d\alpha} = \frac{1}{2} f_Y > 0 \tag{22}$$

$f_Y > 0$  でなくてはならない。したがって(19)の条件は、さらに  $f_Y$  の値が、

$$0 < f_Y < 2 \tag{23}$$

の範囲内にあれば、(22)は満たされる。

以上より、 $h_Z < 0$  の範囲では図 4-1 のイ領域の前半部分 (太線) がこの条件に適合するため、この範囲で Hopf 分岐が存在する可能性がある。同様に、 $h_Z > 0$  の範囲では図 4-2 のウ領域の後半部分 (太線) がそれに対応する。

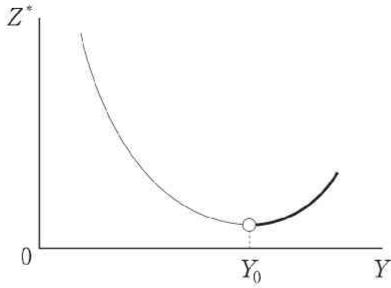


図 4-1

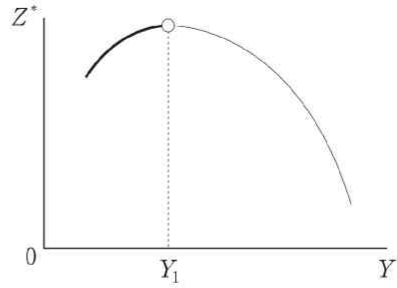


図 4-2

### 3.3. その他の領域について

#### 【ア領域とエ領域】

領域アと領域エでは、次の条件が成立している。

$$-\infty < \alpha f_Y \leq 0, \quad Det = 1 > 0, \quad Tr < 0$$

これより判別式 $\Delta$ は、

$$\Delta = Tr^2 - 4 Det = (\alpha f_Y - 2)^2 - 4 = \alpha f_Y(\alpha f_Y - 4) \leq 0$$

となるため、

$$\Delta < 0, \quad Det > 0, \quad \begin{cases} Tr = 0 \cdots \text{centre} \\ Tr < 0 \cdots \text{focus} \cdots \text{stable} \end{cases}$$

$$\Delta = 0, \quad \text{node}, \quad Tr < 0 \cdots \text{stable}$$

の位相をもつ。いずれにせよ安定である。

#### 【イ領域後半とウ領域前半】

イ領域後半とウ領域前半では、

$$\alpha f_Y \geq 2, \quad Det = 1 > 0, \quad Tr > 0$$

である。よって、

$\Delta \geq 0, \text{node}, \text{Tr} > 0 \cdots \text{unstable}$

$\Delta < 0, \text{focus}, \text{Tr} > 0 \cdots \text{unstable}$

となり、不安定となる。以上をまとめると図 5-1 と図 5-2 となる。

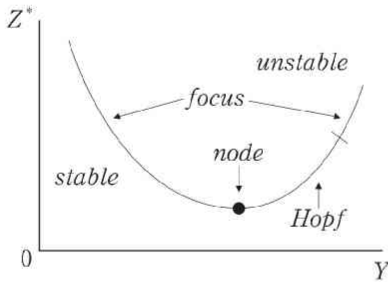


図 5-1

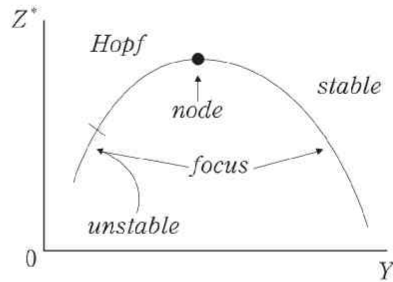


図 5-2

## 4. 各局面の位相

### 4.1. 生産調整係数 $\alpha$ について

これまでの議論はすべて事前的な関係から構成されており、在庫ストック水準  $Z$  も計画量であった。しかし実際には需要予測を誤ることなどによって、事後的な在庫ストックは計画量とは異なりうる。この差が事前的なシステムにフィードバックされて影響を与える。本稿ではこの役割を生産調整係数  $\alpha$  に与えることにする。 $\alpha$  は事前的な経済と事後的な経済との唯一の橋渡しの役を果たす。在庫ストック水準が最適在庫水準より多い場合には生産は縮小され、少ない場合には拡大される。そこで企業は最適在庫ストック水準と事後的な在庫ストック水準をシグナルとして生産調整するものとしよう。

事後的な在庫ストックを  $Z^a$  とし、事前的な生産は事後的な生産と等しいものとする。企業は次のような関数をシグナルとして、生産調整係数  $\alpha$  の値を変更して行くものとする。

$$\alpha = \delta \left( \frac{Z^* - Z^a}{Y} \right) \quad (24)$$

$\delta$  は線形の関数とし、最適在庫ストック水準  $Z^*$  が事後的な在庫ストック水準  $Z^a$  と一致

する適正在庫ストックの状態を  $\alpha = 1, Z^* < Z^a$  という過剰在庫ストックが存在する場合、生産を縮小する方向へと向かうため  $\alpha < 1$ 、在庫ストックが不足している  $Z^* > Z^a$  には生産を拡大するため  $\alpha > 1$  となるものとする。この関係を図3-1と図3-2に合わせると図6-1図6-2のようになり、図6-1ではU字曲線の内側では過剰在庫ストックが発生しており、外側では在庫ストック不足が起こっている。一方、図6-2ではキャップ形□の外側では過剰在庫が、内側では在庫不足が生じている。

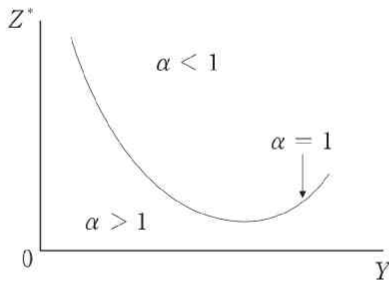


図6-1

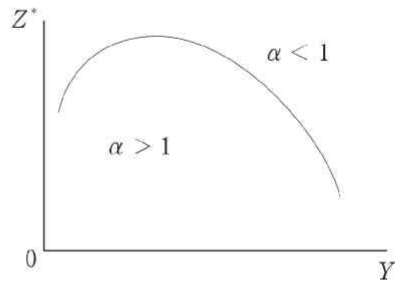


図6-2

#### 4.2. 生産と事後的な在庫ストック

事後的な在庫ストックと生産との関係（動き）を見るため、次のような体系を想定する。

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= f(Y, Z^a) - Y \\ \dot{Z}^a &= Y - D \end{aligned} \tag{25}$$

先述の通り生産は事前的な生産計画が事後的に実行されるため同量である。Dは需要をあらわす。事前的な需要は意図的な在庫投資から乗数を通して派生する需要の実から構成されていたが、(25)における需要には意図的な在庫投資による需要だけでなく、予測できなかった数々の需要も含まれる。そこでDを外生的与えられるものとする。事後的な在庫投資はこのような需要と生産との差だけ発生する。需要が生産を上回る場合には、超過分を生産ではなく在庫ストックの放出で対応したことになる。(25)より、

$$\begin{vmatrix} (f_Y-1)-\lambda & f_{Z^a} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (f_Y-1)\lambda - f_{Z^a} = 0$$

$$\Delta = ?, \text{ Det} = -f_{Z^a} > 0, \text{ Tr} = f_Y-1 \begin{cases} = 0 \cdots \text{centre} \\ \neq 0 \cdots \text{focus} \begin{cases} \text{Tr} < 0 \cdots \text{stable} \\ \text{Tr} > 0 \cdots \text{unstable} \end{cases} \end{cases}$$

となる。判別式は不明であるが、 $Tr$  と  $Det$  から *focus* か *centre* の形状をとることが分かる。

位相を見るため(25)のヤコビアンをとると、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} & \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z^a} \\ \frac{\partial \dot{Z}^a}{\partial Y} & \frac{\partial \dot{Z}^a}{\partial Z^a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_Y-1 & f_{Z^a} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & - \\ + & 0 \end{bmatrix}$$

となり、領域によって  $f_Y$  の値がことなるため、各ケースに分けて考察しなければならない。

#### 4.3. 各領域の位相

図 3-1 と図 3-2 を、(23)を基準として、次 5 つの領域に分ける (図 7)。

$$A: -\infty < f_Y \leq 0, \quad B: 0 < f_Y < 2, \quad C: 2 \leq f_Y < \infty$$

$$E: 2 > f_Y > 0, \quad F: 0 \geq f_Y > -\infty$$

図 7 における A 領域では  $Tr < 0$  であるため体系は安定で、位相図は図 8-1 のようになる。C 領域では  $Tr > 0$  となり、不安定である。位相は図 8-2 となる。領域 F では再び  $Tr < 0$  で、安定となり図 8-3 のようになる。図 7 における A 領域では  $Tr < 0$  であるため体系は安定で、位相図は図 8-1 のようになる。C 領域では  $Tr > 0$  となり、不安定である。位相は図 8-2 となる。領域 F では再び  $Tr < 0$  で、安定となり図 8-3 のようになる。

領域 B と領域 E は Hopf 分岐が存在する領域となり、領域 B では領域 A の安定であっ

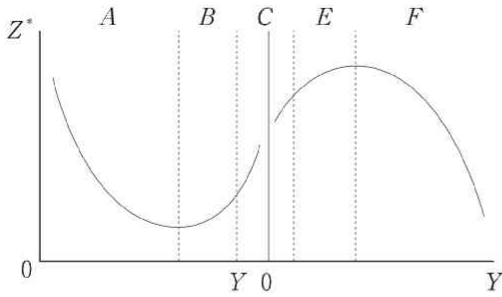


図7

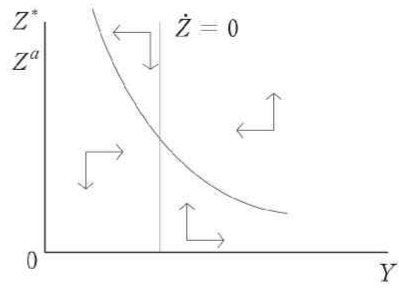


図8-1

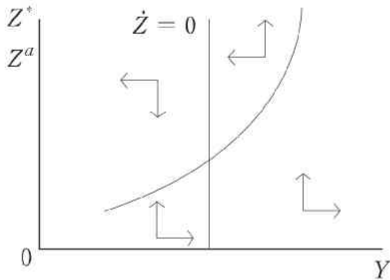


図8-2

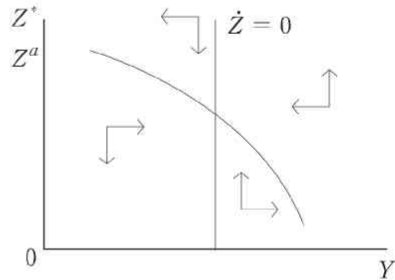


図8-3

た経済を不安定へと変える。逆に、E領域では、C領域において不安定であった経済を安定へと変換する。

#### 4.4. 経済の動きと $\alpha$ の変化について

⑤は一定の需要の下での $Y$ と $Z$ の挙動を表している。すべての領域において経済は *focus* または *centre* のような動きを示すが、需要が連続的に変化するなら、シクリカルな動きを描く前に（もちろんシクリカルな動きをしても構わない）、需要のシフトに引きずられながら移動して行くであろう。

#### 【 $h_z < 0$ のケース】

いま図8-1と図8-2を用いて経済の動きと $\alpha$ の変化をみる。両図を合わせた図9-1において、経済が点bに位置しているとする。点bにおける $Y$ を $Y_b$ とすると、 $Y_b$ に対する最適在庫ストックは $Z_b^*$ である。しかし実際には $Z_b^a$ しか在庫ストックが存在しないため、在庫ストックが不足していることになる。そのため企業は生産を拡大するため $\alpha$

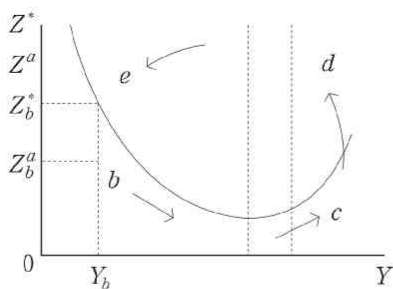


図 9-1

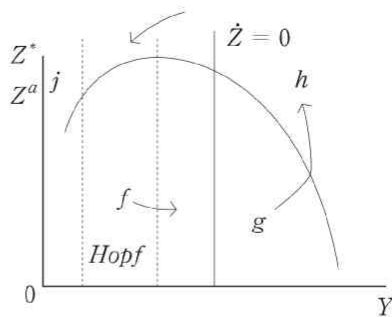


図 9-2

を  $\alpha > 1$  とするであろう。しかし  $Z_b^*$  と  $Z_b^a$  の差は小さいため  $\alpha$  は 1 よりわずかに大きい値となる。さらに需要が右方向へシフトし続けると、経済は Hopf 分岐領域へと入り、点  $c$  へと進む。点  $c$  でも在庫ストック不足が起きているため  $\alpha > 1$  であるが、 $Z_c^*$  と  $Z_c^a$  の差が大きいため  $\alpha$  は 1 より大きい値を採るであろう。したがって点  $b$  から点  $c$  へと向かう過程で  $\alpha$  は次第にその値を大きくして行く。安定的であった経済は点  $c$  へと入ると不安定となる。点  $c$  から点  $d$  へと進む。点  $d$  では  $Z_d^* < Z_d^a$  となり、過剰在庫ストックが発生しているため、生産は縮小方向へと向かう。それと共に所得が縮小し、消費の減少から需要が左シフトを始める。 $\alpha$  は 1 以下となるが、この点では  $Z_d^*$  と  $Z_d^a$  の差はそれほど大きくないため  $\alpha$  の値は 1 に近いであろう。さらに需要が左シフトすることで経済は再び Hopf 領域へと入り、点  $e$  へと進む。ここでは再び安定となる。ここでは  $Z_e^* < Z_e^a$  であり、その差は大きいため  $\alpha$  は 1 よりかなり小さい値を採る。つぎに点  $e$  の経済は点  $b$  へと向かう。よって経済は点  $b$  から再び点  $b$  の属する領域へと回帰するが、その過程で  $\alpha$  が 1 よりかなり小さい値から、1 よりかなり大きい値へと近づき、再び 1 以下へと減少して行く。

この過程において拡張期と収縮期にそれぞれ 1 度ずつ Hopf 分岐が存在する可能性のある領域を通過する。

【 $h_Z > 0$  のケース】

この場合も同様に考えると図 9-2 のようになる。点  $f$  から点  $g$  へと進む過程で一度 Hopf 領域を通過する。このあたりでは生産に伴う費用と在庫保有に伴う費用が共に上昇しだすため、インフレ状態となり、需要は減少しはじめ、左へとシフトしだす。 $\alpha$  の値は 1 より大きい値から 1 に近い値へと減少する。点  $g$  から点  $h$  へ進むと  $\alpha$  の値は 1 以下

の1に近い値から、点jの1以下の1よりかなり小さい値へと変化する。ここでも2度 Hopf 領域を通過する。

#### 4.5. $h_Z < 0$ のケースと $h_Z > 0$ のケースの合成

本稿のモデルでは  $h_Z = 0$  で不連続となるため、2つのケースを合成することは出来ない。しかしもしそれが可能であるなら、図9-3のようになる。このとき拡張局面と収縮局面でそれぞれ2回 Hopf 領域を通過する。図9-3において、k点からm点において経済は、安定→不安定→安定という動きを示し、点mからn点でも同様に安定→不安定→安定を経験する。このことは、いわば、拡張局面の回復期後半から好況期前半にかけて、経済は不安定となり、活発な経済活動が行われていることを示し、また後退期後半から不況期前半においては、経済の急速な衰退を表していることになる。

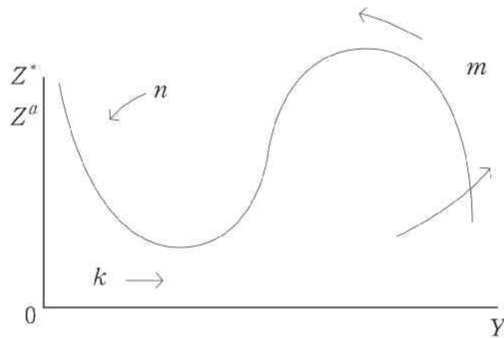


図9-3

## 5. 結 語

景気の循環過程において、経済は様相を変えているように見受けられる。景気回復時に比べ、好況期の活動は活発であり、後退期に比べ不況期の落ち込みは激しいものがある。このことは拡張過程において経済が変化していると見ることも出来よう。同様に収縮過程を通して、経済が変貌していると感じられる。このような経済の様相の変化の原因を、本稿では経済の安定・不安定の交代に求めた。このことをモデルによってあらわすため、Hopf 分岐を応用した。循環過程上で安定であった経済が不安定に、不安定である経済が再び安定へと変化する経済を提示することが目的である。



また、通常、分岐理論ではパラメータを外生的に変化させ、システムが安定から不安定へ(あるいはその逆)と変化して行くが、本稿では生産調整係数を生産と事後的在庫ストックの関数と置くことで、 $\alpha$ が内生的に変化して行く試みを行った。

結果、循環過程で安定、不安定を繰り返すことになった。このことを景気の動きに換言すると、景気回復時当初、経済はゆっくりと進み、回復期の後半から好況期前半にかけて、経済は活発になる。好況期後半には勢いが劣り始め、後退期へ入る。後退期後期と不況期前期に激しく経済は落ち込み、不況期後期へと進んで行くことになる。

### 参 考 文 献

- [1] Asada, T., Chen, P., Chiarella, C. and P. Flaschel [2007] "Continuous Time, Period Analysis and Chaos from an Empirical Perspective" *CEM Working Paper* 144, Bielefeld Univ. (この論文は次のアドレスから直接入手できる。)  
[www2.wiwi.uni-bielefeld.de/~cem/pub/wp/Continuous\\_Time.pdf](http://www2.wiwi.uni-bielefeld.de/~cem/pub/wp/Continuous_Time.pdf)
- [2] Devaney, R. L. [1986] *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. (後藤憲一訳 [1987] 『カオス力学系入門』協立出版株式会社)
- [3] Flaschel, P., Groh, G., Proano, C., and W. Semmler. [2008] *Topics in Applied Macrodynamics Theory*. Springer-Verlag.
- [4] Gandolfo, Giancarlo [1997] *Economic Dynamics*, Study edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- [5] Invernizzi, S. and A. Medio [1991] "On lags and chaos in economic dynamic models." *Journal of Mathematical Economics*, 29, 531-551.
- [6] Lorenz, Hans-Walter, Nonlinear [1989] *Dynamical Economics and Chaotic Motion*. In Beckmann, M., and W. Krelle (eds.), *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 334. Springer-Verlag.
- [7] 内上 誠 [2002] 『在庫循環と主循環—ミクロ的最適化行動からの接近—』近畿大学短期大学部研究叢書第1冊.
- [8] 小谷 清 [1987] 『不均衡理論—ワルラス均衡理論の動学的基礎—』東京大学出版会.
- [9] 西村和雄, 矢野 誠 [2007] 『マクロ経済動学』岩波書店.