

非対称な循環モデルに関するノート

内 上 誠

抄録

これまでの景気循環モデルは、2階差分方程式や2本の連立微分方程式によって全循環過程を表すことが出来るモデルを構築することに主眼が置かれている。その結果、拡張過程と収縮過程は対称的な動きを示すことになる。けれども実際に観察される循環には、非対称性が観察される。非対称性をモデルの中に取り入れるために外部から、天井や床、あるいは特殊な要因を入れるという工夫がなされてきた。本稿はそのような非対称性を考慮する際の準備ノートである。景気循環モデルを構築する際に、参考になると思われるいくつかのケースについてまとめている。

キーワード

非対称性、スイッチング、安定・不安定

Notes on Business Cycle Model Having Asymmetrical Aspects

Uchigami, Makoto

Abstract

The characteristic of observed Business Cycle is to have asymmetrical aspects in the course of it. As a model for the characteristics, it make use of the two dimension differential equation system. Furthermore, some factors are added to the system from the outside. I think that regime switching models are useful for explanation of such characteristics. The purpose of this note is to propose examples of switching cases as follows.

- ① The Case of changing adjustment coefficient(s), ② The Shifting case of $\dot{z} = 0$ curve, ③ The Case that System has a growth factor added from the outside.

Key Words

asymmetry, regime switching, stable and unstable

目 次

1. はじめに
2. 調整係数を変えるケース
 - 2-1. 応用例
3. 曲線のシフトのケース
 - 3-1. 調整係数が増加するケース
4. 成長要因があるケース
5. おわりに

1. はじめに

景気循環モデルはさまざまなタイプのもので発表されているが、その特徴のひとつとして、2階の差分方程式や2本の連立微分(差分)方程式によってモデル展開するものが多数存在する。これは、2次元の図中に位相図を簡単に描くことができ、視覚的に捉え易いというメリットを有するためである。

けれども、導出された循環モデルから導き出される拡張期と収縮期は対称的な動きを表す。観察される現実の景気循環の中には対称的な事象もあるが、非対称な事象も現れる。この点においてモデルには不満が残る。そのため、モデルの修正にはいろいろなことが試されてきた。修正方法としては外部からさまざまな要因を取り入れるという方法と、一部には、異なるシステムを合成する方法がよく行われる。本ノートは後者の立場に立つ。

以下では、企業自身が任意に決定するフロー変数の調整係数の変化や、在庫フロー、貨幣供給や設備投資などのフロー変数の蓄積がストック変数の変化をもたらすことを利用し、異なるシステムを1つの位相図の中へ取り入れることを試みる。

2. 調整係数を変えるケース

次のような具体的数値を持った連立方程式を考える。

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \alpha(y-Z) \\ \dot{Z} &= y+2Z \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、 y ：フロー変数、 Z ：ストック変数、 α ：生産調整係数とする。 y と Z はある均衡からの乖離を表すものとする(たとえば Y を生産、 W を在庫ストック、記号*はそれぞれの均衡を表すものとする、 $y = Y - Y^*$ 、 $Z = W - W^*$ である)。通常、この α は全循環過程を通して一定と仮定され、分析される。(1)を図示すると図-1となる。

(1)の判別式 Δ は、

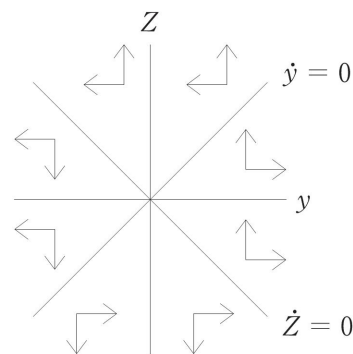


図-1

$$\Delta = \alpha^2 - 8\alpha + 4$$

である。ここでは α の値を特定化していないため、 α の取りうる値によって、判別式の値が正あるいは負(場合によってはゼロ)の値を持つことが可能であると考えられる。かつ、システムのphaseもそれに従い、変化することになる。いま想定しているシステムでは、 α の境界値が、

$$\alpha_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

であるため、 α が境界値の値を持つとき、判別式 Δ はゼロとなる。また、 α の値が、

$$\text{約}0.536 < \alpha < \text{約}7.464$$

の範囲内にあると、判別式 Δ はマイナスとなり、phaseはfocus形となる(図-2)。逆に、それ以外の範囲では判別式 Δ はプラスとなり、振る舞いはnode形を示すことになることが分かる(図-3)。

なお、

$$Tr = \alpha + 2 > 0, Det = 3\alpha > 0$$

であるため、均衡は両ケースとも不安定となる。

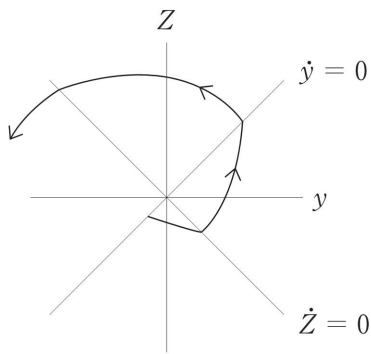


図-2

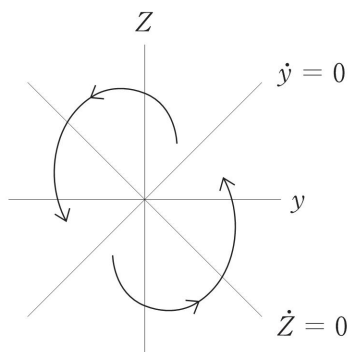


図-3

2-1. 応用例

いま(1)を考えるため、 y を生産(=所得)、 Z を在庫ストックとして用いる(ただし、システム自体の経済学的な意味については問わないことにする)。先述したように、 y と Z が均衡からの乖離部分を表すことに注意しておく。

生産調整係数 α は企業の生産調整を表すものとする。企業が生産を拡張するか、縮小するかどうかは、在庫ストックの状態を見て判断することができる。いわば在庫ストックの水準は企業の生産シグナルとしての役割を有する。たとえば、在庫ストックが適正在庫ストックにある場合、この水準に在庫ストックが達しているなら、なんら生産調整を必要としないため、 α を変化させる必要が無い。一方、在庫ストックが増加傾向にある場合には、過剰生産による販売不振が起きていることになるため、生産は縮小方向へと調整されなくてはならない。よって、企業は α の値を小さくする。

逆に、在庫ストックが減少する場合には、需要に対して過少生産であるため、企業は生産を拡大することが望ましい。企業は α の値を大きくして対応するであろう。

すると、図-2ないし図-3を用いると、 $\dot{Z} = 0$ を境として、右領域では在庫ストックが増加し、左領域では減少する。したがって企業は、右領域では α の値を引き下げ、生産を縮小し、左領域では α を引き上げ、生産を拡張するという行動をとることになる。

両図とも $\dot{y} = 0$ と $\dot{Z} = 0$ の位置は同じであり、位相も同じ方向の矢印を持つ。そこで、 $\dot{Z} = 0$ を境界線として、図-2の右領域(focus形)と図-3の左領域(node形)を合成すると図-4となる。

この場合、均衡点(Y^* , W^*)は図-2も図-3も不安定であるから循環は次第に外側へと広がって行く。

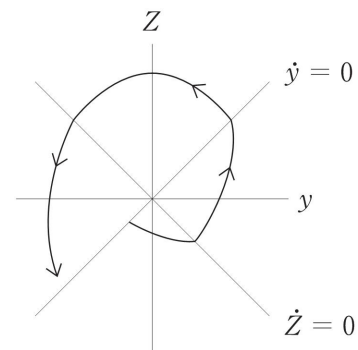


図-4

想定する式の係数の値によっては安定領域と不安定領域が共存することは十分ありうる。そのような例はすでに公表されている⁽¹⁾。

3. 曲線のシフトのケース

体系がフロー変数のみで構成され、ストック変数が無い場合には、ストックの変化による曲線のシフトを考えることが出来る。そこで、次のような体系を考える。

$$\begin{aligned} \dot{y} &= ay - bz \\ \dot{z} &= cy + dz \end{aligned} \tag{2}$$

y : 生産、 z : 在庫フローとする。 y は再びある均衡からの乖離とする。しかし在庫投資は原点より左領域ではマイナスを表し、在庫ストックが減少することを意味する。したがって原点は $(Y^*, 0)$ である。(2)は図-5のような位相を持つ。ただ、在庫投資 z がプラス領域では在庫ストックが蓄積され、マイナス領域では減少するため、在庫ストックが蓄積されて行くと、過剰な在庫ストックの発生が懸念され、 $\dot{z} = 0$ 線は左方向へとシフトし、在庫投資を減少させる方向へと力が働くであろう。逆に、在庫ストックが減少しだすと、在庫投資を誘発するきっかけとなるため、右方向へとシフトを開始するであろう⁽²⁾。

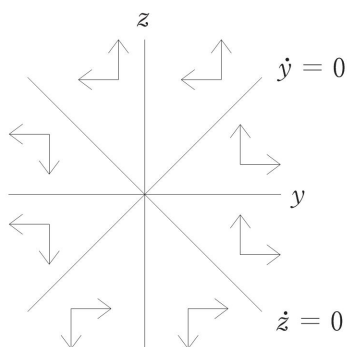


図-5

ストック変数の変化に伴う曲線のシフトを考えた場合に注意すべきことは、時間の扱いである。ある期間内では、フロー変数が変化している間、ストック変数も変化している。しかし、通常、経済学では、ある期間の期首と期末の間に、フロー変数は連続して変化するが、ストック変数は期末ないし期首にのみ変化するものとする。この手法に従えば、ここでも、ストック変数を次期の期首に変化するものとするのが肝要となる。

そこで、このような事情を見るため、図-6を用いる。なお、トレース Tr がプラスであるケー

スを考え、均衡は不安定であると想定している。

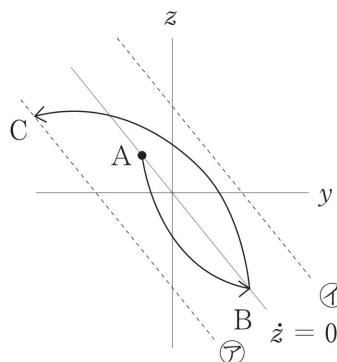


図-6

いま経済が最適在庫ストック水準を達成している $(Z = Z^*)$ A点にあるとする。ここから位相に従いB点へと進む。先述に従って、A点からB点へと進む期間を1期間と考えると、経済がB点に到達したとき、ストック変数つまり $\dot{z} = 0$ 曲線がシフトすることになる。

A点からB点へと進む過程で、在庫投資はプラスからマイナスへと変化する。プラスとマイナスのどちらが大きいかを比べるため、図中の面積で考えることにする。

まず、均衡点は不安定であるから、A点とy軸との距離はB点とy軸との距離より短いことが分かる。するとA点、y軸および $\dot{z} = 0$ 線に囲まれた面積(プラスの在庫投資を代表する)と、y軸、B点および $\dot{z} = 0$ 線に囲まれた面積(マイナスの在庫投資を代表する)を比べると、明らかに後者のほうが大きいことが分かるため、A点からB点に至る過程で在庫投資はマイナスになっていることになる(図-6-1参照)。

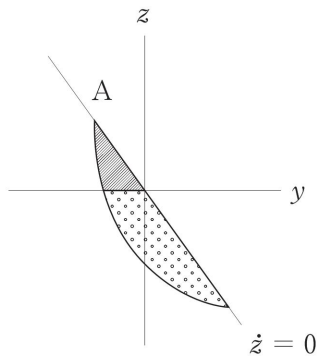


図-6-1

したがって、在庫ストックは減少し、 $\dot{z} = 0$ 線を左へとシフトさせることに繋がる。なぜなら脚注(2)の式より、 $\dot{z} = 0$ は、

$$y = \frac{1}{c} \left[-dz + e(Z - Z^*) \right]$$

であり、在庫ストックの減少は、 $Z - Z^* < 0$ となり、右辺2項をマイナスとするためである。よって $\dot{z} = 0$ 線は⑦へと達する。

B点からは位相に従い、上昇をはじめますが、均衡が不安定であるため、B点からC点へと至る過程では（同様に面積を考えれば）マイナスよりプラスの在庫投資が優勢となり、在庫ストックが蓄積し始め、 $\dot{z} = 0$ 線は右方向へとシフトし、④にシフトする。その結果、経済はC点から上へと到達する。

均衡が不安定であるため、以下に続く循環は広がりながら拡張して行くことになる。

図-7は均衡が安定である場合を示している。A点からB点へと達した経済は、均衡が安定であるため、先ほどとは逆にプラスの在庫投資が発生し（これも面積を考えれば良い）、 $\dot{z} = 0$ 線は右方向へとシフトする。経済はB点からC点へ進む。C点に至る過程で、在庫投資はマイナスとなるため、 $\dot{z} = 0$ 線は左方向へとシフトする。その様子を描いたものが図-7である。

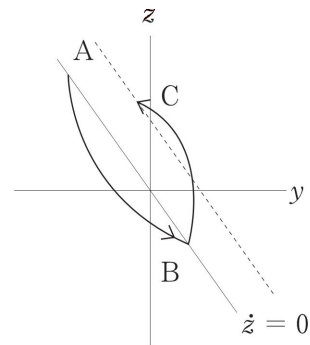


図-7

3-1. 調整係数が変化するケース

在庫ストックの増減を通して企業は生産量の過大・過小を判断することが出来る。生産が過剰なときには生産を減少させる対策が採られ、過少な場合には拡大する調整がとられるものとする。もし生産と在庫投資をある均衡水準 (Y^*, z^*) から乖離を表すものとすれば、section2のように調整係数を大きくしたり、小さくしたりする調整ではなく、調整係数をプラスやマイナスにすることを意味する。当然、プラスの場合には生産拡大を、マイナスの場合は生産縮小を意味する。

そこで、便宜的に、生産調整係数がプラスの場合には+1、マイナスの場合には-1をとるものとする。次のようなシステムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{y} &= ay + bz \\ \dot{z} &= cy + dz \end{aligned} \tag{3}$$

これは、調整係数が+1のケースである。マイナスのケースとしては、

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -ay + bz \\ \dot{z} &= cy + dz \end{aligned} \tag{4}$$

を想定すればよい。システム(3)と(4)は図-8と図-9のような位相を持つ。

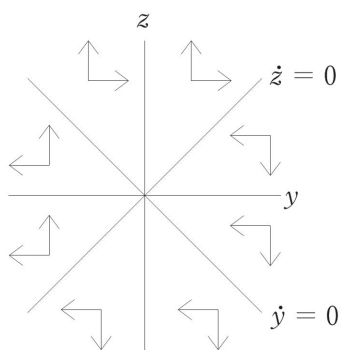


図-8

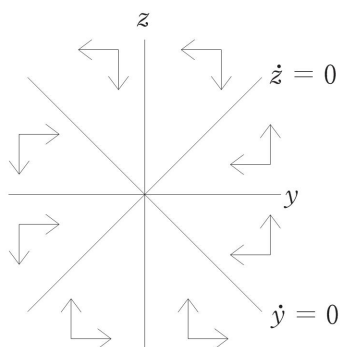


図-9

図-8と図-9と比べれば、位相が反転していることが分かるが、 $\dot{y} = 0, \dot{z} = 0$ はまったく同じ位置にある。

システムの変換あるいはスイッチは、経済が $\dot{y} = 0$ を通過すると起こる。通過しない限りシステムのスイッチは起こらない。 $\dot{y} = 0$ の右領域では生産が拡大していることを意味するため、システムは(3)が作用する。左領域では生産が減しているためシステム(4)が機能する。

また、(3)では、 $\dot{z} = 0$ の左領域は在庫投資が増加するため、在庫ストックが蓄積する。右領域では、在庫投資が減少するため、在庫ストックは減少する。逆に、(4)では、 $\dot{z} = 0$ の右領域は在庫投資が増加し、在庫ストックは増加する。右領域では、在庫ストックは増加する。

いま、図-10において、経済が a 点にあるものとする。ここではシステム(4)が作用しているものとする。位相に沿って a 点から b 点へと移動する

経済過程で在庫ストックは増加するが、在庫投資はプラス領域とマイナス領域を通過するため、在庫ストックとして増加するかどうかは分からない。そこでまず在庫ストックが増加した場合を考える。b 点に到達した経済は在庫ストックの増加のため、 $\dot{z} = 0$ が右方向へとシフトする。かつ b 点で経済は $\dot{y} = 0$ を通過するため、b 点を出発点とするシステム(3)が作用しだす。すると、経済は b 点から c 点へと移動する。以下同様の動きが繰り返される。生産は循環を繰り返しながら、在庫ストックを蓄積して行くことになる。同じように考えると、在庫ストックが減少する場合は、図-11のような動きが得られる。この場合、生産は縮小し、在庫ストックも減少を続ける。

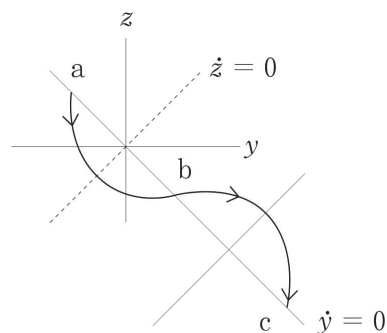


図-10

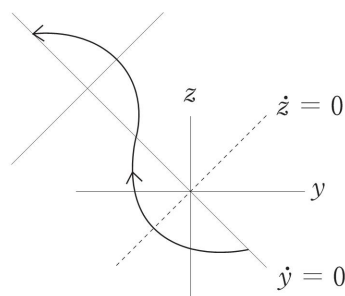


図-11

4. 成長要因があるケース

外部から成長要因を取り入れる場合を考える。過去の景気循環モデルでもそのような工夫を見出すことができる。Section3-1 を参考にして、ここでは次のようなモデルを考える。

$$\begin{aligned} \dot{y}^a &= \beta(ay^a - bZ^a) \\ \dot{Z}^a &= \gamma(cy^a + dZ^a) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、生産 y^a と在庫ストック Z^a は共に、ある均衡 (y^*, Z^*) からの乖離を表しており、それを $y^a = y - y^*, Z^a = Z - Z^*$ と定義しておく。すると在庫ストックの減少は生産拡大のシグナルとなるため、生産と在庫ストックの調整係数 β と γ はプラスの値を取る。逆に、在庫ストックが過剰になり始めると、生産と在庫ストックは縮小する方向へと進むため、 β と γ はマイナスとなる。このときモデルは、

$$\begin{aligned} \dot{y}^a &= -\beta(ay^a - bZ^a) \\ \dot{Z}^a &= -\gamma(cy^a + dZ^a) \end{aligned} \quad (6)$$

となる。(5)(6)を図示すると、それぞれ図-12、図-13となる。図中の位相がまったく逆になっていることが分かる。また、 $\dot{y}^a = 0, \dot{Z}^a = 0$ は両図ともその位置は同じである。

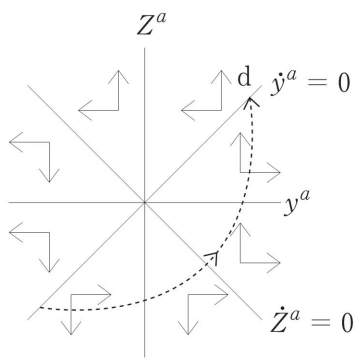


図-12

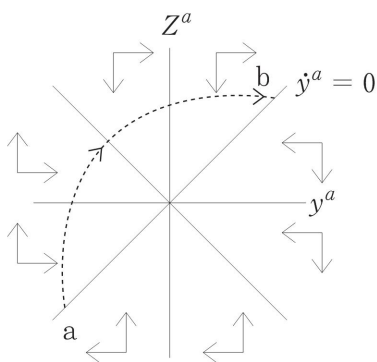


図-13

ここで成長として $\dot{Z}^a = 0$ 線が右方向へとシフトするケースを考える（ただし $\dot{y}^a = 0$ は変化しないものとする）。いま、図-14において経済が a 点にあるものとする。経済は位相に沿って b 点へと進む。a 点から b 点へ移行する過程で在庫ストックは蓄積されるため、 $\dot{Z}^a = 0$ は右方向へシフトすると（図中②）、b 点は新たなシステム(6)の初期値となる。これを c 点とする。c 点の経済はシステム(6)に従って、c 点から d 点へと移る。さらに d 点に至る過程における在庫ストックの蓄積を通して、 $\dot{Z}^a = 0$ 線の更なる右シフトが起こり（図中③）、d 点では再びシステム(5)が支配する領域が現れ、経済は e 点へと進む。以下同様の動きを示す。この動きは循環的成長のような振る舞いを行っている。

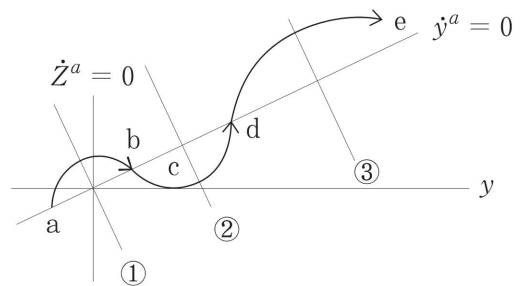


図-14

5. おわりに

循環過程の非対称性をモデル内に取り入れる工夫は、以前より考察されてきた。本ノートではシステムを合成することにより、この非対称性を取り入れる立場に立っている。ここでは、係数を増減させるケース、係数がプラスからマイナスへの変換のケース、成長要因を外部から取り入れるケースについて考えた。当然、これ以外にもさまざまなケースを考えられようが、経済学で応用される場合には、これらのケースが基本になると思われる。残念ながら本ノートでは式の経済学的な意味を明確にはしていないため、実際の応用に際しては更なる制約に追加や変形を行わなくてはならな

いであろう。しかしながら、そのような場合でも、基礎的なアイデアはこのノートの内容と著しく異なることは無いと思われる。

(注)

- (1) Honkapohja and Ito [1983]
- (2) 最適在庫ストック水準を Z^* とした場合、 Z^* からの乖離が在庫投資に影響することを考えればよい。 Z^* より現実の在庫ストック Z が多い場合には、在庫投資を減らす動機となろうから、

$$\dot{z} = cy + dz - e(Z - Z^*)$$

を考えればよい。 e は感応係数である。

参考文献

- (1) Burghes, David and Morag Borrie. *Modelling with Differential Equations*. Ellis Horwood Limited. [1990]
- (2) Gandolfo, Giancarlo, *Economic Dynamics*, Study edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. [1997]
- (3) Honkapohja, Seppo and Takatoshi Ito, "Stability and Regime Switching" *Journal of Economic Theory* 29, pp. 22-48. [1983]
- (4) Lorenz, Hans-Walter, *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. In Beckmann, M., and W. Krelle (eds.), *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 334. Springer-Verlag. [1989]