ケインズ型投資関数の動学化

内　上　　　誠

序、

ケインズの投資関数は投資決意に際し、その追加的資本設備の存続中に発生するであろうn期間に渡る将来収益を考慮してなされるところに特徴がある。けれども、このようにして決定される最適な投資量は、あくまである期あるいはある時点における投資量の決定に関するものであり、毎期連続的に投資が計画されるとするなら、投資量決意に関する条件は修正されるかもしれない。そこで本稿の目的は、そのような無限期間に渡る投資を考慮した場合の最適な投資量の条件を考察することにある。そこで、まず、ケインズの投資関数を再述し、次にそれを無限期間に渡るモデルへと拡張する。

（1）ケインズ型投資関数の再述

ある期間内の第i番目の付加的1単位の投資に対する予想収益をq_i（$i=1\cdots m$）とする。この投資による資本資産の存続期間がn期間であると仮定すると、今期だけでなく将来期間に渡っても収益が発生するため予想収益は1つの系列として考えなくてはならない。この予想収益の系列を$\{q_{ij}\}$（$j=1\cdots n$）と表すなら、$Qi=\Sigma q_{ij}$となる。さらに、将来発生すると予測される収益を現在価値で評価し直すなら、

$$Q\,i=\frac{q_{i1}}{(1+r)}+\frac{q_{i2}}{(1+r)^2}+\cdots\cdots+\frac{q_{in}}{(1+r)^n}$$

となる。便宜上これを連続型で表すと、

$$Q\,i=\int_0^n q_{ij}\,e^{-rj}\,dj \qquad (1)$$

となる。ここで、r は短期利子率であり、考察期間中は変化しないものとする。この（1）式が投資付加的1単位当たりの需要価格である。簡単化のために q_{ij} がすべておなじ水準と仮定すると、$q_{ij}=\overline{q}\,i$ となるため、

$$Q\,i=\overline{q}\,i\int_0^n e^{-rj}\,dj=\overline{q}\,i\left(\frac{1-e^{-rn}}{r}\right) \qquad (2)$$

ところで、（1）式で示される付加的1単位の投資に対する予想収益（$q\,i$）の水準は所与として与えてきた。しかし、限界的投資に対する予想水準の形成は現存資本ストックや投資計画量に依存する。しかし、資本ストックや投資計画量が予想収益の水準自体にどのように影響するかをアプリオリに仮定することはできないため、ここではケインズに従い、次のことだけを仮定する(2)。ある予想収益水準を仮定した下で、さらに投資を追加して行くことにより「その類型の資本の供給が増加するにつれて予想収益が低落するから」(3)、1単位目の投資に比べ2単位目の投資の予想収益は落下する。予想収益は投資量の増加とともに落下して行くことになる。したがって、$\overline{q}\,i=q\,(I\,i)$ であり、$d\overline{q}\,i/d\,I>0$ の性質を待つ。ただし、$I\,i=\Sigma\Delta I\,p$ $(p=1\cdots i)$。同様に、x 番目、y 番目の追加的投資に対して、$\overline{q_a}=\Sigma q_{aj}$ $(a=x,\ y)$ を仮定すると、$\overline{q_x}=q\,(I_x)$、$\overline{q_y}=q\,(I_y)$ が成立し、$1<\cdots<x<y<\cdots m$ なら $q_x>q_y$ となる。したがって、ある投資水準 $I\,m$ までに m 回の追加的投資がなされるなら、そこまでの予想収益の割引現在価値の合計 $V\,m$ は、

$$Vm=\sum_{p=1}^{m} Q\ (I\,p)\ \Delta I\,p=\sum_{p=1}^{m} q\ (I\,p)\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-rn}}{r}\right)\Delta I\,p \qquad (3)$$

この仮定はあくまで考察期間のみに作用するということであり、他期間には及ばない。

もし、この期間内に投資を I_0だけ行うと計画し、さらにその期間内に行われる追加的投資の回数を$m\to\infty$に拡大するなら、

$$V=\int_0^{I_0} Q\ (I)\ d\,i=\int_0^{I_0} q\ (I)\left(\frac{1-e^{-rn}}{r}\right) d\,I \qquad (4)$$

と表すことができる。[4]

一方、付加的１単位の投資に対する供給価格Sは所与とする。しかし、投資が増加するにつれ「通常、その類型の資本を生産する設備への圧力がその供給価格を増加させるから」[5]、供給価格をその期間内の投資水準の増加関数と仮定し得る。したがって、$S=S\ (I)$ となり、I_0の投資に対し必要な供給価格合計は、

$$Z=\int_0^{I_0} S\ (I)\ d\,I \qquad (5)$$

となる。

ある投資水準に対する利潤は次式から求められる。

$$\pi=V-Z \qquad (6)$$

この利潤を極大にするために必要な投資水準を求めるため、極大の１階条件より（６）式をＩについて微分し，ゼロと置くと、

$$\pi=\int_0^{I} q\ (I)\left(\frac{1-e^{\ \ rn}}{r}\right) d\,I-\int_0^{I} S\ (I)\ d\,I \qquad (7)$$

$$\frac{d\,\pi}{d\,I}=\left[\frac{1-e^{\,rn}}{r}\right] q\ (I)\ -S\ (I)\ =0 \qquad (8)$$

となり、この条件を満たす投資水準$I=I^*$が決定される。

ところで、第k番目の供給価格S_kと資本の限界効率rm_kの間には、

$$S_k=\frac{q_{k1}}{(1+rm)}+\frac{q_{k2}}{(1+rm)^2}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{q_{kn}}{(1+rm)^n}$$

あるいは、

$$S_k=\int_0^n q_j e^{-rmj} dj$$

のような関係が成立する。ここでも、$q_k=q_{kj}$（$j=1,\ 2\cdot\cdot\cdot n$）とする。$k\to\infty$にすると先ほどと同じように、dZ/dIは、

$$\frac{d}{dI}\left[\int_0^I S(I)\ dI\right]=\frac{d}{dI}\left[\int_0^I \{\lim_{k\to\infty} q_k\int_0^n e^{-rmj}dj\}\ dI\right]$$

$$\frac{dZ}{dI}=\left[\frac{1-e^{rmn}}{rm}\right]q(I) \qquad (9)$$

となる。ゆえに、$i=k$より、

$$\frac{d\pi}{dI}=\left[\left(\frac{1-e^{rn}}{r}\right)-\left(\frac{1-e^{rmn}}{rm}\right)\right]q(I)=0 \qquad (10)$$

となり、(10) 式を満たすためには$r=rm$でなくてはならず、rmがrに等しくなるまで追加的投資を行うことが最適であることを表している。これが最適投資水準を求める条件となる。この結果は周知のものである。

以上の結果はあくまで1期間における最適な投資水準を決定する場合の条件にすぎない。そこで、次に連続的に投資が毎期計画される場合の投資の最適条件を求めることにする。

（2）無限期間に渡る投資決定

ここではある期tから将来に渡る投資計画を仮定し、最適な投資水準の条件を明らかにし、1期モデルの場合と比較することにする。求めるべき問

題は、

$$max \quad \pi_t = \int_t^{\infty} (V_{wt} - Z_{wt}) \, e^{-\int_t^w r(v)\,dv} dw \qquad (11)$$

$$subject\ to \quad \dot{K}_t = I_t - \delta K_t \qquad (12)$$

である。δ は減価償却率であり、$0 < \delta < 1$ で一定と仮定する。(11) 式と (12)式よりハミルトン関数は、

$$H_t = [(V_{wt} - Z_{wt}) + \lambda_t (I_t - \delta K_t)] \, e^{-\int_t^w r(v)\,dv}$$

となる。ここで、$\lambda_t = \mu_t exp(\int_t^w r(v)\,dv)$。すると、

$$\frac{\partial H_t}{\partial I_t} = \left[\left(\frac{1 - e^{rn}}{r_t} \right) - \left(\frac{1 - e^{rmn}}{rm_t} \right) \right] q(I_t) + \lambda_t = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{d\mu_t}{dt} = (\dot{\lambda}_t + \lambda_t r_t) \, e^{-\int_t^w r(v)\,dv}$$

$$-\frac{\partial H_t}{\partial K_t} = \lambda_t \delta e^{-\int_t^w r(v)\,dv}$$

$d\mu_t / dt = -\partial H_t / \partial K_t$ より、

$$\dot{\lambda}_t + (r_t - \delta) \lambda_t = 0 \qquad (14)$$

横断条件を、

$$\lim_{t \to \infty} K_t \mu_t = 0 \qquad (15)$$

とする。(15) 式は無限時間先の資本ストックの割引現在価値がゼロになることをあらわす。

(13) 式が無限期間に渡る投資計画の最適条件となる。一期間のみを考察している場合には rm は r 水準に等しくなるように投資量が決定されるが、無限期間に渡る場合には、さらに λ の値を考慮しながら投資が決定されることになる。この λ の存在こそが、1期間の最適投資決定条件と無限期間に渡る最適投

資決定条件との相違点となる。(13) 式に従うと、短期利子率 r と今期の資本の限界効率 rm の他に、別の予想収益率 λ が存在し、三つの要因によって毎期の最適な投資量が決定されることになる。

実は、λ は投資の帰属価格であり、追加的投資から将来発生するであろう予想収益の割引現在価値である[(6)]。

ところで、(13) 式を時間に関して微分し、(14) 式へ代入し整理すると、

$$(q'/q)\ I/(\dot{I}/I)=\delta-r_t$$

ただし、$q'=dq(I)/dI$。$(q'/q)\ I$ はまさに投資の予想収益弾力性 ηI に他ならない。さらに変形すると、

$$(\dot{I}/I)=(\delta-r_t)/\eta I \tag{16}$$

ここで現れる投資 I はすべて各期の最適投資量である。したがって、q' は今期と比較し次期の投資が変化した場合に予想収益はいかに変化するかを表しており、これは長期期待の領域の問題となる。それゆえその弾力性についても先験的な仮定はできない。

(3) ＩＳ－ＬＭモデルとの比較

通常のＩＳ－ＬＭモデルを簡略化したものを用いる。財市場が常に均衡していると仮定し、

$$Y_t=1/1-c\cdot I_t(r_t)$$
$$\dot{r}_t=\alpha\ \{L(Y_t,r_t)-M\} \tag{17}$$

とする。ここで、Y は所得、c は限界消費性向（$0<c<1$；一定）、L は貨幣需要、M は貨幣供給（一定）、α は貨幣市場の調整速度（一定）を表す。上式をまとめると、

$$\dot{r}_t=\alpha\ [L\{I_t(r_t),\ r_t\}-M] \tag{18}$$

とできる。

一方、我々のモデルは同様な整理をし、(16) 式と (18) 式より、

$$\dot{I}_t = (\delta - r_t) / \eta I \cdot I_t \tag{19}$$

$$\dot{r}_t = \alpha \left[L(I_t, r_t) - M \right] \tag{20}$$

となる。通常のＩＳ－ＬＭモデルの挙動は (18) 式によって決定される。図－1より判るように体系は安定的であり、利子率は均衡水準 r^* へと収束するため、所得も均衡所得へと収束する。これは通常のＩＳ－ＬＭモデルの性質そのものである。

一方、我々のモデルの体系に線形近似をなし、局所的な安定性を吟味しても必ずしも安定とはならない(7)。したがって更なる分析を必要とする。

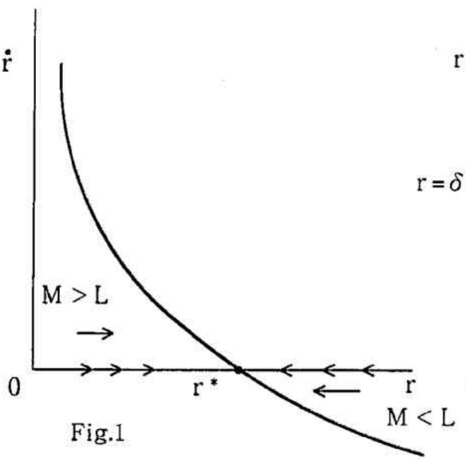

Fig.1

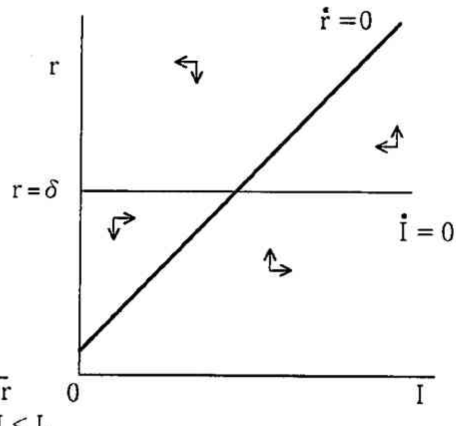

Fig.2

（4）結語

本稿の目的は、ケインズ型の投資関数を無限期間モデルへと拡張した場合、最適投資水準を決定する条件がどのように変化するかを分析することである。

一期間のみを扱うモデルの場合には資本の限界効率を利子率に等しくさせるように投資を決定すればよい。しかし、無限期間へ拡張した場合には、利子率と資本の限界効率の他に、投資の帰属価格を表すλが決定要因として加わる。このλの存在により資本の限界効率は利子率以下に下がったとしても投資は続けられることになる。(13) 式の内容から$V+\lambda-Z=0$ということであるから、$V-Z=\lambda$ということになる。したがって、利子率＝資本の限界効率は投資の最適化条件ではなくなる。もし、λがゼロに収束するなら再び1期間モデルの最適条件が復活する。(14) 式からその安定性が保証されるならλはゼロとなり得るが、我々の体系の安定性分析の際ふれたように、さらに分析を進めないとその結論は明確にならない。

注

（1） Keynes［6］のこと。

（2） 資本ストックの量が予想収益の形成に影響することは明らかである。ケインズはその短期期待について、「生産者が現存の資本設備によって今日生産を始めようと決意するに当たって、生産が感性したときに対してどれだけが得られるかを推定する場合の基礎をなす短期期待・・・」と述べている。Keynes［6］, pp. 145－146.

（3） Keynes［6］, P. 134.

（4） 定積分の定義より、

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{p=1}^{m} Q(Ip)\,\Delta Ip = \lim_{m\to\infty}\sum_{p=1}^{m} q(Ip)\left(\frac{1-e^{-rn}}{r}\right)\Delta Ip$$

$$= \int_0^{I} Q(I)\,dI = \int_0^{I} q(I)\left(\frac{1-e^{-rn}}{r}\right) dI$$

（5） Keynes［6］, P. 134.

（6） 宇沢［13］, P. 110.

（7） 体系は（19）式と（20）式より、

$Trace = \alpha L r_t + (\delta - r_t) / \eta I$

$Determinant = \alpha / \eta I \{ L r (\delta - r_t) - L I \cdot I \}$

ここで、$L x = \partial L / \partial x$。各係数および変数は$L r < 0$, $L I > 0$, であるため、体系の安定性についてはなんら明確にし得ない。

参考文献

（1） Blanchard, o., "Debt, Deficits, and Finite Horizons", Journal of Political Economy, vol. 93, No. 2, 1985

（2） Blanchard, o. and S. Fischer, *Lectures on Macroeconomics,* Camdridge, Mass.: MIT Press. 1989.

（3） Chiang, A. C., *Foundamental Methods of Mathematical Economics.* 3 ed., Mcgraw Hill, 1984.

（4） Gabisch, Gunter and Hans-Walter Lorenz, *Business Cycle Theory: A Survey of Methods and Concepts*. Springer-Verlag. 1989.

（5） Gandolfo, G., *Economic Dynamics: Methods and Models*. North-Holland. 1980.

（6） Keynes, J. M., *The General Theory of Employment, Interest and Money*, London Macmillan, 1936. 塩野谷祐一訳『雇用・利子および貨幣の一般理論』東洋経済新聞社, 1983.

(7) Sidrauski, Miguel, "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy," American Economic Review, vol. 57, May 1967.

(8) Uzawa, Hirofumi, "Time Preference and the Penrose Effect in a Two-Class Model of Economic Growth," Journal of Political Economy, vol. 77, 1969.

(9) 足立英之,『マクロ経済動学』有斐閣. 1994.

(10) 岡本武之,『雇用と分配のマクロ経済学』有斐閣. 1981.

(11) 小野善康,『貨幣経済の動学理論－ケインズの復権』東京大学出版. 1982.

(12) 宇沢弘文,『経済動学の理論』東京大学出版会. 1989.

(13) 和田貞夫,『動態的経済分析の方法』中央経済社. 1989.