ケインズ経済学のカオス的景気変動の可能性※

内　上　　　誠

はじめに

経済主体の最適化行動から経済変動をモデル化する試みはすでに久しく、マクロ経済学におけるミクロ的基礎という名のもとに多くの研究成果がすでに発表されている。けれどもそれらの多くは非ケインズ派モデルあるいはケインズとの折衷モデルであるように思われる。それらの研究に共通するものは目的関数として消費者の効用関数を想定し、効用最大化が中心的な課題となっているところにある。しかしケインズ「一般理論」では消費者の最適化行動よりも企業の投資行動に重要性が当てられている。したがってケインズモデルをミクロ的な経済主体の最適化行動という側面から形成しようとするなら、企業側の投資行動に注目すべきである。そしてその際、最も重要な役割を果たす要因はケインズが重視した企業による将来に対する予想あるいは期待である。換言すると資本主義経済の不安定性の主因はこの将来予測にあると言っても過言ではなかろう。しかしこれまではこの主観的な将来予想という要因の取扱いの難しさゆえに、あまり積極的には扱われなかったが、無視をすることは経済動学分析にとって大きな代償を払うこととなろう。

ところで現在の経済システムがケインズが明らかとしたような運行をしてい

※本稿は平成6年度学内研究助成金（課題番号：GG14、研究課題：ミクロ的最適化行動からの景気変動理論の研究）に基づく一連の研究の一部である。ここに改めてお礼申し上げます。

るとするなら、さらにそのシステムの運行にカオス的な挙動が存在するとするなら、我々は将来予測をすることも、したがって最適な経済政策を立案、実行することも不可能となる。そのような場合には、システムがカオス的な振る舞いを生ぜしめないような方向へと誘導することが必要となり、このことは形式的には、これまでのような政策ではなく、システムのパラメター自体を制御するような政策立案が必要であることを意味する。

本論文では前者を主題としてケインズモデルを再考する。つまり企業行動として利潤最大化行動を仮定し、その下で静学的なケインズ体系に資本ストックの変化と期待要因としての予想収益率の変化を取り入れ、動学的なケインズ体系を形成し、その挙動にカオス的な振る舞いが発生する可能性があることを明らかにする。

以下ではまず第１章で短期のケインズ型投資関数を再定式化し、第２章では資本ストックの変化を明示的に取り入れ、定常均衡の存在とその安定性を分析する。続いて予想収益率を利潤の関数とみなし、予想収益率と定常均衡の相互作用により、予想収益率あるいは同様に定常均衡自身がカオス的な振舞を引き起こす可能性があることを示す。

第１章　短期のケインズ型投資関数

ケインズにしたがうと、ある１期間における最適な投資量は資本の需要価格と資本の供給価格によって、あるいは利子率と資本の限界効率によって決定される。形式的にはこの関係は次のようにして導き出される。なお以下では資本の需要価格関数と供給価格関数を連続型として表すため、投資１単位＝限界的資本１単位と仮定している。

（1）資本の需要価格

資本の需要価格とは追加的資本（新たに増設されるすべての資本）の予想収益の流れを現行市場利子率で割り引いた現在価値である。ここで便宜的に次のような仮定を置く。限界的資本あるいは投資1単位はn期間存続し、存続期間中毎期 q だけの収益をもたらすと予想されるものとする。したがって q は資本1単位あるいは投資1単位当たりの予想収益率と定義される。さらにこの予想収益率 q は n 期間中一定であるとする。将来の予想収益率 q を現在価値で評価し直すために割引率として長期利子率 r を用いると、限界的資本あるいは資本1単位から発生する n 期間にわたる予想収益率の割引現在価値合計 Q は、

$$Q = q\int_0^n e^{-rj}\,dj = q\left(\frac{1-e^{-rn}}{r}\right) \qquad (1-1)$$

と表すことができる。これが資本の限界効率である。

これまで一定と仮定された予想収益率 q の水準は投資水準に依存する。この仮定は「その類型の資本の供給が増加するにつれて予想収益が低落する」(1)というケインズの見解による。すると（1－1）は、ある一定額の投資水準の下で形成される予想収益率 q に基づいて導き出された関係式である。したがって、投資水準が異なれば予想収益率も異なり、資本の限界効率 Q も異なる水準となる。たとえば $q = q_0 + f(I) = q(I)$ などの関数がそれにあたる。ここで q_0 は一定であり、$I = 0$ の場合の予想収益率をあらわす。しかし具体的に q_0 がどれほどの水準であるかについてはもちろんアプオリに仮定することはできない。それゆえここではケインズに従い $q_0 > 0$ で、さらに投資の増加につれて予想収益率は逓減するという仮定のみを採用する。ゆえに、

$$dq(I)/dI < 0,\ f(I) < 0$$

である。同じことではあるが、（1－1）より $Q = Q(I)$, $dQ/dI < 0$ と表すことができる。各投資水準に対するこの Q の系列が資本の限界効率表である。

ここでもし企業が投資水準をI水準（新たな資本I単位）まで計画するなら、

$$V(I)=\int_0^I Q(I)\,dI=\left(\frac{1-e^{-rn}}{r}\right)\int_0^I q(I)\,dI \qquad (1-2)$$

となる。このVを投資がIまで計画された場合の資本の需要価格と定義する。

（２）資本の供給価格

一方、投資１単位あるいは限界的資本１単位の供給価格Sとは当該資本に追加する１単位の資本を生産させるのにちょうど十分な価格である。そこでこの供給価格を所与とし、また、予想収益率qについても先ほどと同様に新資本の存続するn期間中は一定とすると、このとき、限界的な資本１単位の供給価格と予想収益率との間には次のような関係が成立する。

$$S=q\int_0^n e^{-r_m k}\,dk=q\left(\frac{1-e^{-r_m n}}{r_m}\right) \qquad (1-3)$$

ここで投資１単位当たりのr_mは資本の限界効率を表し、この式によって決定される。

供給価格の変化についてはケインズにしたがおう。「通常、その類型の資本を生産する設備への圧力がその供給価格を増加させる」(2)。ゆえに、供給価格Sは投資水準（あるいは追加する資本の量）の増加とともに上昇することになり、

$$S=S(I),\ dS/dI>0$$

と仮定される。

もし、投資がI水準まで計画される（追加される資本がI単位）なら、供給価格の総額$Z(I)$は、

$$Z=\int_0^I S(I)\,dI$$

であり、Zと資本の限界効率の関係は、

$$Z(I)=\int_0^I q(I)\left(\frac{1-e^{-r_m(I)n}}{r_m(I)}\right)dI \qquad (1-4)$$

となり、この式より投資I単位の場合の資本の限界効率が決定される。ここでZを資本の供給価格と定義する。

（3）最適な投資水準

（1－2）（1－4）では別々に投資水準を任意に与えたが、ここでは逆に（1－2）（1－4）を用いて最適な投資水準を求めることにする。

利潤πを$\pi=V-Z$によって定義する。（1－2）（1－4）より利潤最大化のための1階条件は、

$$\frac{d\pi}{dI}=Q(I)-S(I)=0 \qquad (1-5)$$

となり、限界的な資本1単位の需要価格と供給価格が等しくなるところで最適な投資水準が決定されることを表している。あるいは、両者が等しくなるまで投資を行うことが最適であることになる。

また、（1－5）のSに（1－3）を代入すれば、

$$d\pi/dI=q(I)\left[(1-e^{-rn}/r)-(1-e^{-r_m(I)n})/r_m(I)\right]=0$$

となり、この式は、最適な投資水準が利子率と資本の限界効率が均衡（$r=r_m(I)$）するところで決定されること、あるいは、一定の利子率に対して資本の限界効率が一致するまで投資を行うことが最適であることを教えている。

第2章　長期の資本需要供給価格

前章の分析はいわば短期のそれであったため資本ストックは一定であり、資

本ストックの変化による資本需要価格への影響についてはなんら考慮が払われなかった。しかし分析が長期へと拡張されるなら、当然資本ストックの変化が需要価格へ及ぼす効果について考えなくてはならない。このことは長期期待の問題である。

（１）長期の資本需要価格

分析を長期分析へと拡張するため、資本ストックを新たな変数として、需要価格関数へと取り入れ、

$$V = V\,(I,\ K) \qquad (2-1)$$

のように変更する。便宜的にこれを長期の資本需要価格関数とよぶことにする。以下を通してこの関数は連続で、２階微分可能であると仮定する。

まずこの関数への投資の変化による効果は（１－２）をもちいて、

$$\partial V / \partial I \equiv V_1 = \int_0^I Q\,(x,\ K)\,dx = Q\,(I,\ K) > 0 \qquad (2-2)$$

となる。ただしここでは記号の混乱を避けるため被積分項の投資を x で表している。この計算より、投資１単位の増加は限界的に Q（>0）だけ収益をもたらすことになる。各追加的投資に対する Q の系列がまさに資本の限界効率表を形成し、それらは非負である。さらに資本ストックが（２－２）に与える効果は、

$$\frac{\partial V}{\partial K} \equiv V_K = \int_0^I \left(\frac{\partial Q\,(x,\ K)}{\partial K}\right) dx \qquad (2-3)$$

となる。これは V 全体のシフトを表す。けれども現段階では資本ストックの V への効果は不明であり、どちらの方向へとシフトするかは分からない。さらにそれぞれの２階微分の結果は、

$$V_{II} = \partial Q / \partial I = Q_I, \qquad V_{IK} = \partial Q / \partial K = Q_K$$

$$V_{KI} = \partial\,(Q_K \cdot I) / \partial I = Q_K, \quad V_{KK} = \partial Q_K \cdot I / \partial K = Q_{KK} \cdot I$$

となる。したがって、

$$V_{IK} = V_{KI}$$

ただし、$V_{ij} \equiv \partial V / \partial j \partial i$。

（2）各偏微係数について

前章で仮定したように、一定の資本ストックの下での投資の効果は、ここでも成立すると仮定する。つまり任意の $I \in (0, \infty)$ に対して、

$$V_I > 0, \quad V_{II} > 0 \qquad (c-1)$$

が成り立つ。前者は資本の限界効率表を、後者はその傾きをそれぞれ表している。他方、$V_{IK} = V_{KI}$ は資本の限界効率表のシフトを表している。先述と同様に資本ストックの V への効果が明らかでないため、これらの偏微係数の符号をまだ確定することはできない。

（3）長期の資本供給価格

資本ストックの変化に対する資本の供給価格への影響については、本稿では考慮しないことにする。これはとりわけわれわれの主題が投資需要側にあり、資本ストックの資本供給価格への効果を取り入れることによる複雑化を避けるためである。それゆえ長期の資本供給価格については短期のそれと同様に $Z = Z(I)$ と仮定する。この関数についても連続で2階微分可能であることを仮定し、

$$\frac{dz}{dI} \equiv Z_I = \int_0^I S(x)\,dx = S(I) \qquad (2-4)$$

$$\frac{d^2 Z}{dI^2} \equiv Z_{II} = \frac{dS}{dI} \equiv S_I$$

の性質をもつものとする。S は資本ストック1単位を追加的に生産するために

必要な限界費用であり、$S(0)=0$、任意の投資$I \in (0, \infty)$にたいして$S(I)>0$、$dS/dI>0$とする。つまり、

$$Z_I > 0 \qquad Z_{II} > 0 \tag{c-2}$$

第3章　長期の最適投資計画

考察すべき問題は、第0時点から将来に到る全時点を通して得られる利潤合計の現在割引価値を最大にするには毎時点の投資をどれくらいすればよいか、という条件を見つけだすことである。

（1）最適投資計画

次式がその考察対象となる。

$$max \quad \pi = \int_0^I [V_t(I_t, K_t) - Z_t(I_t)] e^{-rt} dt \tag{3-1}$$

$$subject\ to \quad \dot{K}_t = I_t - \delta K_t \tag{s-1}$$

$$K(0) = K_0 > 0 \tag{s-2}$$

$$K(t) \geqq 0 \tag{s-3}$$

$V_t - Z_t$はt時点における利潤であり、長期利子率rを割引率として現在割引価値表示で表されている。そのような各時点の利潤合計がπである。制約条件（s－1）におけるδは減価償却率であり、$0<\delta<1$とする。（s－2）は資本ストックの初期値がプラスであり、（s－3）は考察期間中の資本ストックがマイナスにならないことを意味する。

（3－1）から Lagrangian integrand 関数Ψをつくると[(3)]、

$$\Psi_t = [V_t(I_t, K_t) - Z_t(I_t) + \lambda_t(\dot{K}_t + \delta K_t - I_t)] e^{-rt} \tag{3-2}$$

λは未定乗数を表す。

Ψが最大となるためのオイラー条件は、

$$\partial \Psi_t / \partial I_t = V_{tI}(I_t,\ K_t) - Z_{tI}(I_t) - \lambda_t = 0 \quad (3-3)$$

および、

$$\partial \Psi_t / \partial I_t - d(\partial \Psi_t / \partial \dot{K}_t) / d_t = V_{tK} + \delta \lambda_t - \dot{\lambda}_t = 0 \quad (3-4)$$

$$\partial \Psi_t / \partial \lambda_t = \dot{K}_t + \delta K_t - I_t = 0 \quad (3-5)$$

である。Ψが最大となるためにはさらに横断条件が必要である。この場合制約条件（s－3）より横断条件は、

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_t K_t = 0 \quad (3-6)$$

でなくてはならない。以上の３つの条件が満たされるときΨは最大となり、これらの条件を満たすように最適な投資水準が決定される。ところで静学的な場合の最適投資条件（１－３）とこの（３－６）は非常によく似ているが未定乗数λを含む点でことなる。

（２）未定乗数λの経済学的意味について

経済学では未定乗数を shadow price と考えるのが普通である。つまり（３－２）の右辺第１項の利潤は貨幣単位で測定されているが、第２項の資本ストックの増分は実物単位で測定されている。この両者の測定単位の相違を調整するのが未定乗数であり、第２項を貨幣単位へと変換する役目を担っている。したがって第２項は貨幣単位での追加的な資本ストック（たとえば１円）の増加がΨに与える効果を表している。けれども現在われわれが考察している議論の範囲内では次のように解釈することもできるし、その方が有用であるようにも思われる。

（３－３）より、

$$V_{tI}(I_t,\ K_t) - Z_{tI}(I_t) = \lambda_t > 0 \quad (3-7)$$

未定乗数は shadow price であるため必ずプラスの値をもつ。よって（3 − 7）はプラス値をとることになる。この条件（3 − 7）の意味するところは資本の需要価格 V の変化分が資本の供給価格 Z の変化分を λ だけ上回った水準で最適な投資水準が決定されるということである。つまり λ は V にマイナスに作用する。供給価格以外に利潤に対してマイナスに作用する要因が存在することになる。そして λ は資本ストックの増分に関わりをもつため、資本ストックの変化こそが利潤にマイナスに作用している原因ということになる。

このようなことが起こり得る可能性として考えられることはまさに V 関数自体の下方シフト、あるいは同じことであるが、各投資水準に対応する予想収益率全体の低下つまり資本の限界効率表の下方シフトが起こる場合だけである。したがって資本ストックの変化は資本の限界効率表にマイナスに作用することになる。この様子を描いたものが図 − 1 であり、短期的な場合には最適投資は I_0 に決定されるが、長期的な場合には資本の限界効率表を λ だけ下

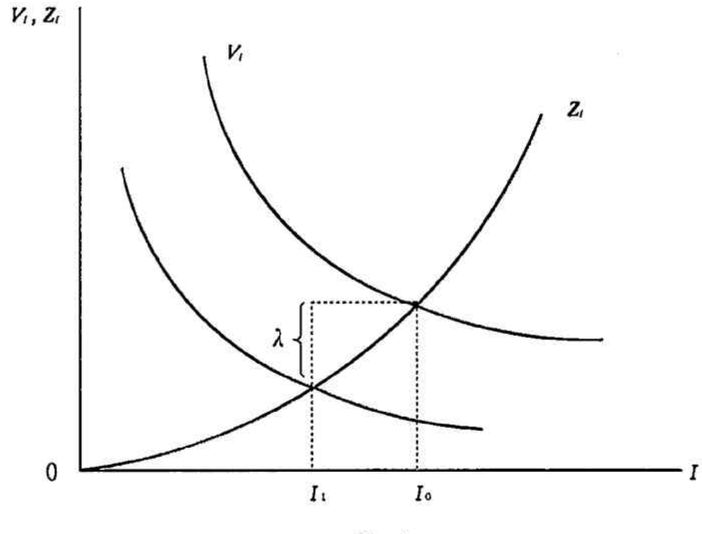


図 − 1

方へとシフトさせた水準 I_1 が最適な投資水準となる。短期的な投資決定の場合には $V_{tI} > Z_{tI}$ であるなら投資を拡大することが最適な行動となるが、（3－6）の条件からすると長期的な場合には $V_{tI} > Z_{tI}$ の状態のままで最適な投資水準へと達することになる。そしてこの需要価格と供給価格の差はすべての資本の限界効率表のシフトによる需要価格の下方シフトによって説明される。

したがって、（3－6）は右辺第1項は一定の資本の限界効率表の下での投資貨幣単位当たりの増加による需要価格と供給価格（つまり利潤率）への効果であり、第2項は投資の貨幣単位当たりの増加による資本の限界効率表の下方シフトを通しての需要価格への効果を表していると読まれるべきであろう。

先述の通り、未定乗数 $\lambda > 0$ は、資本ストックの増加が資本の限界効率表を下方へとシフトつまり V 全体を下方へとシフトさせるように働くことを意味しているため、$\lambda > 0$ であるかぎり次の結果を得る。

$$\partial V / \partial K \equiv V_K < 0 \qquad \text{(c－3)}$$

よって、交差偏微分より、

$$V_{IK} = V_{KI} < 0 \qquad \text{(c－4)}$$

けれども V_{KK} についてはまだ確定できない。

第4章　最適投資経路

（1）投資と資本の動学方程式

投資に関する動学方程式を導き出すため、まず（3－3）を時間で微分し、それを（3－4）へ代入し、dI / dt でまとめる。一方資本に関する動学方程式として（s－1）をそのまま用いると、次のような2本の微分方程式を得る。これがわれわれの考察する体系である。

$$\dot{I} = \frac{(r+\delta)(V_I - Z_I) - V_{IK}(I-\delta K) + V_K}{V_{II} - Z_{II}} \qquad (4-1)$$

$$\dot{K} = I - \delta K \qquad (s-1)$$

最適な投資条件（３－６）より $V_I - Z_I > 0$ でなくてはならず、また（c－3）（c－4）より $V_K < 0$、$V_{IK} < 0$、（c－1）（c－2）より $V_{II} - Z_{II} < 0$ である。

ここで（４－１）と（s－１）の形状を知るため両式を全微分し、それぞれ $\dot{I}=0$ と $\dot{K}=0$ を求めると、

$$\dot{I}=0\ ; \quad \frac{dI}{dK} = \frac{(r+2\delta)V_{IK} + V_{KK}}{(r+\delta)(V_{II} - Z_{II})} = \phi_I \qquad (4-2)$$

$$\dot{K}=0\ ; \quad \frac{dI}{dK} = \delta = \phi_K > 0 \qquad (4-3)$$

（４－２）の分母はマイナスであるが、分子の符号 V_{KK} が不明なため確定しない。ところが企業が利潤最大化行動をとっているという仮定の下では、V_{KK} がマイナスでなくてはならないことがわかる。

負値定符号行列 D より[4]、

$$D = \begin{vmatrix} \pi_{II} & \pi_{IK} \\ \pi_{KI} & \pi_{KK} \end{vmatrix}$$

利潤が最大となるためには行列式が、

$$\pi_{II} < 0 \quad : \quad (V_{II} - Z_{IK}) < 0 \qquad (a)$$

$$\pi_{II}\pi_{KK} - (\pi_{IK})^2 > 0 \quad : \quad V_{II}V_{KK} - (V_{IK})^2 > 0 \qquad (b)$$

でなくてはならない。（a）は満たされているが、（b）が満たされるためには $V_{II} < 0$ であるため、

$$V_{KK} < 0 \qquad (c-5)$$

でなくてはならない。さらに半負値定符号行列でも $\pi_{II}\pi_{KK} - (\pi_{IK})^2 = 0$ でなくてはならず、結局 $V_{KK} < 0$ である。以上より（４－２）は、

$$dI / dK = \phi_I > 0$$

となる。

（２）最適投資条件と均衡の性質

体系の均衡点を見つけだすため、（４－１）と（ｓ－１）をゼロとおき、（ｓ－１）を（４－１）へと代入すると、

$$V_K (I^*, K^*) + (r + \delta) [V_I (I^*, K^*) - Z_I (I^*)] = 0 \tag{4-4}$$

となり、最適投資の条件式が得られる。ここで I^* と K^* はそれぞれ均衡投資と均衡資本ストックを表す。この式は左辺第１項が資本増加による V の下方シフトを表し、第２項は投資の増加による限界利潤の増加を表す。つまり均衡は資本ストックの蓄積による利潤へのマイナス効果と投資の増加による利潤へのプラス効果がちょうどバランスするように決定される。これがまさに長期の場合の最適投資決定の条件である。短期の場合と比べれば、決定条件に資本ストックの効果が入り込む点においてことなる。$V_K < 0$ であるため、$V_I - Z_I > 0$ であり投資はプラス値をもつ。また同時に（ｓ－１）より均衡では $I^* = \delta K^* > 0$ が成立するため、横断条件より均衡点で $\lambda = 0$ となる。したがって V の下方シフトは均衡点でストップする。

ところで $\dot{I} = 0$ と $\dot{K} = 0$ より、

$$\partial \dot{I} / \partial I = (r + \delta) > 0, \qquad \partial \dot{I} / \partial K = A > 0$$

$$\partial \dot{I} / \partial I = 1 > 0, \qquad \partial \dot{K} / \partial K = - \delta > 0$$

ただし、

$$A \equiv [(r + 2\delta) V_{IK} + V_{KK}] / (r + \delta)(V_{II} - Z_{II}) > 0$$

これより θ を根とする特性方程式は、

$$\theta^2 - r\theta - \{A + (r + \delta)\delta\} = 0$$

よって判別式 Δ と Det は、

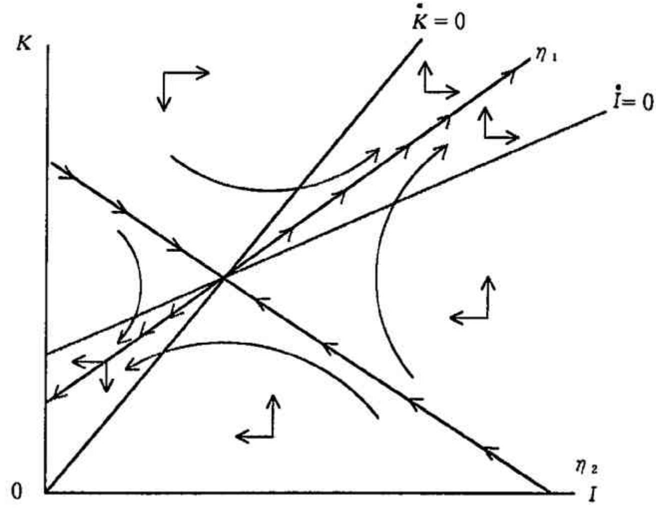
$$\Delta = r^2 + 4 \ \{A + (r + \delta)\ \delta\} > 0$$

$$Det = -\ \{A + (r + \delta)\ \delta\} < 0$$

となり、体系の均衡点は鞍点（saddle point）となる。

（３）位相図による分析

ところで$\dot{I} = 0$と$\dot{K} = 0$をもちいて（４－２）（４－３）を考慮してこの体系の位相図を作成すると図－２のように描き得る。



図－２

唯一均衡へと通ずる経路はη_2だけであり、安定経路η_2上にある経済だけが均衡へと収束する。そこでは投資水準と資本減耗が等しくなるため資本ストックの変化はなく、資本ストックと投資は一定の水準を維持し続ける。ここで経済は定常状態となる。

第5章　ケインズ体系におけるカオス的振る舞いの可能性

これまでの議論では予想収益率ないし資本の限界効率が投資水準にのみ依存するケースを扱ってきた。このことは均衡点では資本の限界効率表が一定のままであることを意味する。しかしケインズが強調するように、景気変動という現象を引き起こす主な主因は資本の限界効率表の激しい変化であり、この要因を所与と仮定したまま分析を続けることは避ける必要があろう。

以下では任意の一定の資本の限界効率表の下で、ある1期間内に瞬間的に均衡が成立するものと仮定する。すると、期間の流れとともに資本の限界効率表が変化すれば同時に各期間ごとに次々と均衡が決定されて行く。したがってそれらの期間を繋ぎ合わせれば1つの均衡経路が得られることになる。そこでこれまでとはことなり、期間分析を用いることにする。

（1）投資と資本ストックについて

第4章では資本ストックに関する動学方程式は制約条件（s－1）によって規定されていた。しかし本章では均衡への調整経路を問題にしているわけではなく、調整完了後の均衡の動きつまり均衡経路が考察対象であるため制約条件（s－1）を利用することができない。つまりもし均衡が成立しているなら（s－1）において必ず$I=\delta K$が成立していなくてはならないため、均衡経路上では毎期この関係が成立し、IとKは同時決定される。したがって、

$$I_t{}^* = \delta K_t{}^* \qquad (5-1)$$

が毎期成立する。以下では混乱をきたさない限り均衡数量を表す＊は省略する。

（2）予想収益率の形成について

これまで扱ってきた予想収益率は投資水準の関数であり、資本の需要関数をまたは一定の資本の限界効率表を形成する基になってきたものである。けれど

もここで扱われのは予想収益率自身 q_0 のシフトであり、これは資本の需要関数自体のあるいは資本の限界効率表自体のシフトとして現れる。換言すればこのシフト要因が一定の下で１本の資本需要関数または資本の限界効率表が描かれていたことになる。

経済主体の主観的な期待によって形成される予想収益については、こと細かく仮定を施すよりもむしろ言い得る最低限のことを仮定することで済ませる方がより実り多く、現実的であるように思われる。ケインズは一般理論において企業の予想収益の形成について次のように述べている。「予想収益に関する期待の基礎にある考慮事項は、一部分は多かれ少なかれ確実に分かっていると想定することのできる現存の事実であり、一部分は多かれ少なかれ確信をもって予想し得るにすぎない将来の出来事である。」(5) そして後者について「我々が期待を構成するさいに、きわめて不確実なことがらを重視することは愚かであろう。・・・この理由のために、現状の事実がある意味において不釣り合いに、我々の長期期待の構成の中に入ってくるのである。」(6) ここでケインズは現状の事実の例として、現存資本ストックと現存消費者需要をあげている。要するに新たな投資に対してどれほどの収益が期待できるかを考える場合、遠い過去の事実にまで遡るより、現状の事実を土台として期待形成を行う方がむしろ合理的であるということになる。

そこで将来の予想収益の形成について次式を仮定する。

$$q_{0t+1} = q\,(I_t,\ K_t) = p\,(\pi_t) \qquad (5-1)$$

$t+1$ 期の予想収益率は今期の投資と資本ストックに依存する。投資は乗数過程を通して今期の需要を形成し、資本ストックは現存供給能力を表す。企業は今期の需要と供給の状況を参考にして来期の予想収益率を形成する。もし需要が供給を上回っているなら新たな投資にたいする高い収益が期待できるが、逆に資本が過剰な場合（この場合にも利潤は発生するが）には予想収益率はかなり低いかまったく期待できない。そしてわれわれが現在想定しているモデル内

においてこれらの事情を反映しているのは、結局今期の利潤率に他ならない。利潤はまさに投資によって創出された需要と現存資本ストックによる供給とのギャップを反映している。それゆえわれわれは（5－1）の右辺のように来期の予想収益率が今期の利潤率に依存して形成されるものと仮定する。つまり次期資本需要関数のシフト要因として今期利潤率を仮定する。さらに簡単化のため関数は単調であり次のような性質をもつものと仮定する。(7)

$$dq_{0t+1} / d\pi_t = p' > 0$$

（3）関数の特定化

以下の分析にとって関数と特定化しておくことが便利である。仮定された性質を満たす長期資本需要関数 V を視覚的に表したものが図－3であり、たとえば次のような関数がそのような形状をもつ。

$$V = V(I, K) = (q_0 - K^\beta) I^\alpha \qquad (5-2)$$

係数は、

$$0 < \alpha < 1, \qquad 1 < \beta \qquad (A-1)$$

であり、マイナスの V を排除するため

$$q_0 > K^\beta \qquad (A-2)$$

とする。よって、

$$V_I = \alpha I^{\alpha-1}(q_0 - K^\beta) > 0, \qquad V_K = -\beta K^{\beta-1} I^\alpha < 0$$

$$V_{II} = \alpha(\alpha-1)(q_0 - K^\beta) I^{\alpha-2} < 0$$

$$V_{KK} = -\beta(\beta-1) K^{\beta-1} I^\alpha < 0$$

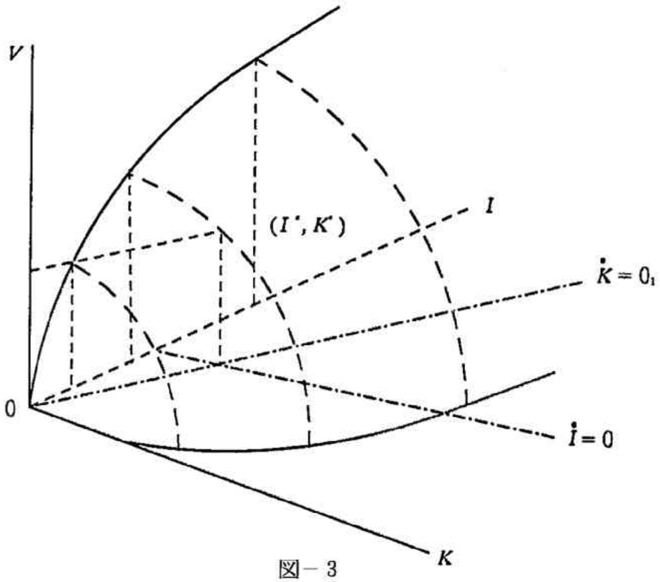
となる。

長期資本供給関数 Z は、

$$Z = Z(I) = I^\gamma \qquad (5-3)$$

われわれは逓増型の資本供給関数を想定しているため、

$$\gamma > 1 \qquad (A-3)$$



図－３

である。よって、

$$Z_I = \gamma I^{\gamma-1} > 0$$

$$Z_{II} = \gamma\ (\gamma - 1)\ I^{\gamma-2} > 0$$

（４）基礎モデル

われわれが考察する体系は次式より構成される。

$$I_t = q_0\ (q_{0t}) \qquad (5-4)$$

$$\pi_t = V\ (I_t,\ K_t) - Z\ (I_t) \qquad (5-5)$$

$$q_{0t+1} = p\ (\pi_t) = E\,\pi_t \qquad (5-1)$$

（５－４）は今期の投資が今期の予想収益率によって決定されることを表す。この関係は次のようにして導き出される。（５－５）に特定化された関数（５－２）（５－３）を代入し、利潤最大化の条件（４－４）をもちいて利潤最大化をもたらす最適な I と K を導き出す。さらに均衡では投資と資本ス

トックの間に（５－１）の関係が成立しているため、結局、

$$q_{0t} = B I_t^{\beta} \qquad (5-6)$$

と縮約することができる。ただし、

$$\gamma = \beta + 1 \qquad (A-4)$$

としている。（５－６）自身はIを与えるとq_0が決定される（一意的であるとは限らないが）ことを意味する。しかしI_tの値域を［０，＋∞）に限定するとIはq_0によって一意的に決定される。この仮定の下では$q_{0t} \rightarrow I_t \rightarrow \pi_t \rightarrow q_{0t+1}$という決定関係が成立する。ただし、

$$B = [\beta \delta^{-\beta+1} + (\delta + r)(\alpha \delta^{-\beta} + \gamma)] / (\delta + r) \alpha$$

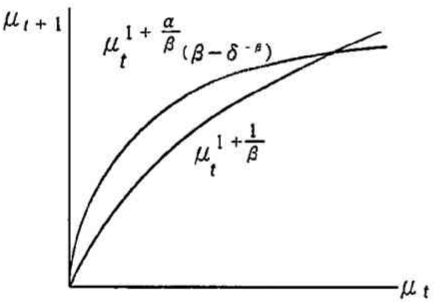
（５－１）は先述の通り将来の予想形成を表すが、ここでは係数Eによって特定化している。この係数Eは、経済主体が今期利潤をどのように将来予測に反映しているかを表している。Eが大きな値をとるとするなら、今期利潤に対して過剰な反応を示していることになる。

（５－１）（５－４）（５－５）より次のような１階差分方程式を得る。

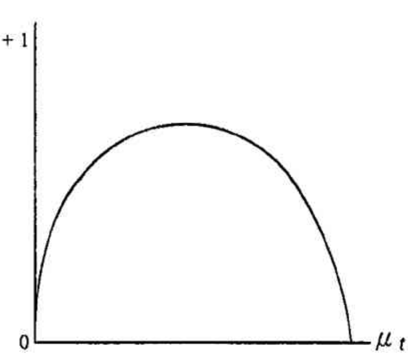
$$q_{0t+1} = E[(q_{0t} - K_t^{\beta}) I_t^{\alpha} - I_t^{\gamma}]$$

さらに（５－１）（５－６）より、

$$\mu_{t+1} = E / B[(B - \delta^{-\beta}) \mu_t^{1+\alpha/\beta} - \mu_t^{1+1/\beta}] \qquad (5-7)$$



図－４



図－５

ただし、$\mu_t = (q_{0t} / B)^{1/\beta}$。ここで$B - \delta^{-\beta} > 0$であることは容易にわかる。さらに$1 + (\alpha / \beta) - 1 + (1 / \beta) < 0$となるため、$(B - \delta^{-\beta}) \mu_t^{1+\alpha/\beta}$線と$\mu_t^{1+1/\beta}$線を描くと図－４のようになり、したがって、（５－７）は図－５のような位相図となる。

（５）カオス的振る舞いの可能性について

（５－７）を整理し、基本となる式を、

$$\mu_{t+1} = E / B \ [\{(B - \delta^{-\beta}) - \mu_t^{1-\alpha/\beta}\} \ \mu_t^{1+\alpha/\beta}]$$

$$= \rho \ (\mu_t) \qquad (5-8)$$

としておく。この関数ρは次のような性質をもつことは明きらかである[8]。

$\mu_t = 0$とすれば$\mu_{t+1} = 0$。$\mu_t = 1$の場合に、もし、

$$E / B = 1 / [(B - \delta^{-\beta}) - 1] > 1 \qquad (5-9)$$

であるなら$\mu_{t+1} = 1$。そこで以下では、

$$(B - \delta^{-\beta}) > 1 \qquad (A-5)$$

を仮定する。このようなμをμ^*で表すことにする。指数関数の性質より$\mu < \mu^*$の場合には$\mu_t^{1+\alpha/\beta} < \mu^*$。逆に$\mu > \mu^*$の場合には$\mu_t^{1+\alpha/\beta} > \mu^*$である。

仮定（Ａ－５）と$lim_{\mu \to 0}(\mu^{1-\alpha}) \to 0$であるため$lim_{\mu \to 0} \ \rho'(\mu) > 1$となる。

ここで新たな仮定として、

$$(B - \delta^{-\beta}) < (\beta + 1) / (\alpha + \beta) \qquad (A-6)$$

を設ければ、$E / B > 1$なので$\rho'(1) < -1$となる。さらに$lim_{\mu \to 0} \ \rho'(\mu) > 1$と指数関数の性質より、

$$lim_{\mu \to 0} \ [\{(B - \delta^{-\beta}) - \mu_t^{1-\alpha/\beta}\} \ \mu_t^{1+\alpha/\beta}] > 0$$

$$lim_{\mu \to \infty} \ [\{(B - \delta^{-\beta}) - \mu_t^{1-\alpha/\beta}\} \ \mu_t^{1+\alpha/\beta}] < 0$$

となるためμの連続性の仮定より$\{(B - \delta^{-\beta}) - \mu_t^{1-\alpha/\beta}\} \ \mu_t^{1-\alpha/\beta} = 0$と

なるμが存在する。そのようなμをμ^{max}とする。したがって、$0<\mu<\mu^{max}$のとき$\rho'(\mu)>0$、$\rho'(\mu^{max})=0$、また$\mu>\mu^{max}$のとき$\rho'(\mu)<0$が成立する。

以上をまとめておくと関数、$\rho(\mu)$にたいして、

Ⅰ、$\rho(0)=0$

Ⅱ、$\rho(1)=1$

Ⅲ、$0<\mu<1$のとき$\rho(\mu)>\mu$

Ⅳ、$\mu>1$のとき$\rho(\mu)<\mu$

Ⅴ、$\lim_{\mu\to 0}\rho'(\mu)>1$

Ⅵ、$\rho'(1)<-1$

Ⅶ、$0<\mu<\mu^{max}$のとき$\rho'(\mu)>0$、$\mu=\mu^{max}$のとき$\rho'(\mu^{max})=0$、
　$\mu>\mu^{max}$のとき$\rho'(\mu)<0$であるようなμ^{max}が存在する。

ここでμ^{max}の前象をμ^{**},、μ^{**}の前象をμ^{c}とし、μ^{max}の写象を$\rho(\mu^{max})$とする。あるいは$\rho^{3}(\mu^{c})=\rho(\mu^{max})$、$\mu^{max}=\rho(\mu^{**})=\rho^{2}(\mu^{c})$、$\mu^{**}=\rho(\mu^{c})$。すると次の関係が成立する。

$$0<\mu^{C}<\rho(\mu^{C})<\rho^{2}(\mu^{C})$$

また性質Ⅵより$\rho^{3}(\mu^{c})<\mu^{c}$が成立する。ここで$\rho^{3}(\mu^{c})<0$とならないように、

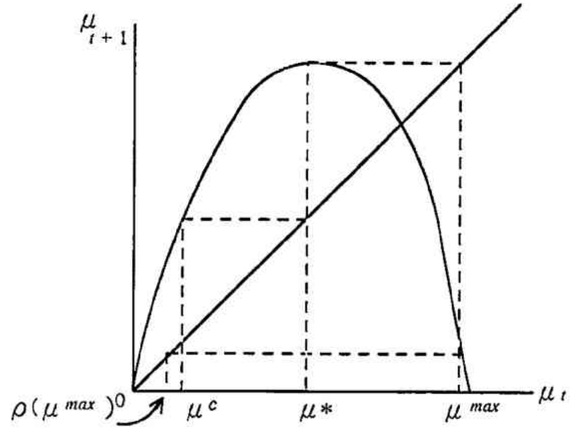
$$\beta>2 \qquad (\mathrm{A}-7)$$

$$(B-\delta^{-\beta})+(\beta+\alpha)/(\beta+1)>2 \qquad (\mathrm{A}-8)$$

を仮定すると、

$$0<\rho^{3}(\mu^{C})<\mu^{C}<\rho(\mu^{C})<\rho^{2}(\mu^{C}) \qquad (5-10)$$

が成立する。この関係を図示したものが図－6である。



図－６

ところでリー・ヨークの定理によると、

$$\theta^3(x) \leqq x < \theta(x) < \theta^2(x)$$

となるような x が存在すれば θ にカオス的な振る舞いが存在することが分かっている。（５－10）は、この条件を満たす μ が存在することを表しているため、（５－８）はカオス的な振る舞いをする可能性を有している。そして投資水準および資本ストックは単調な関数を通して予想収益率と結びついているため、予想収益率のカオス的な変動は、同時に投資と資本ストックとのカオス的な変動をも意味することになる。

（６）各係数間の関係について

係数の値についてさまざまな仮定を行ってきたがそれらの間には次のような関係が成立する。

$$1 > \alpha > 0$$

$$\beta > 2$$

$$2 > \frac{\beta+1}{\beta+\alpha} > (B-\delta^{-\beta}) > 2-\frac{\beta+\alpha}{\beta+1} > 1 > \frac{\beta+\alpha}{\beta+1} > 0$$

けれどもこれらの係数値およびその係数値間の関係だけでは体系が安定か不安定かは判断できない。つまり体系の根本的な挙動を支配しているものは係数 E/B に他ならない。したがってカオス的な挙動が発生するかどうかもこの E/B の値によってきまる。われわれは（5－9）より E/B の値についておおよそのことを知ることができる。$E/B=1/[(B-\delta^{-\beta})-1]>1$ より $E/B>1$ であり、さらに B の値は、

$$B=\beta\delta^{-\beta+1}(\delta+r)(\alpha\delta^{-\beta}+\gamma)/(\delta+r)\alpha$$

であるから、明らかに B は $B>1$ である。すると $E/B>1$ であるためには $E>B$ でなくてはならず、E は $E>B>1$ のような大きい値をとることになる。換言すると E が $E>B>1$ というような値をとる状態では経済にカオス的な変動が起こりうることになる。

E は予想収益率の形成に関する主観的な企業の反応である。E が１以上の数値をとるような状況とは将来予測に関して過剰な反応を示すような状況である。つまり今期の利潤が高い場合には将来さらに高い利潤が期待できると予想をし、逆に低い場合には将来さらに低くなると予想するような反応を示す状況である。そのような状態が現実の経済に存在するかどうかは更なる実証的な研究を必要とするが、ケインズ自身は次のように述べている。「好況は見当違いな投資を生み出すのである。・・・好況の本質的な特徴は、完全雇用の状態において実際にはたとえば２％の収益をもたらす投資が、たとえば６％の収益をもたらすという期待の下に行われ、それに応じて評価されることである。ひとたび幻滅がやってくると、この期待は逆の『悲観の誤謬』によって置き換えられ、その結果、完全雇用の状態において実際には２％の収益をもたらす投資が、ゼロ以下の収益しかもたらさないと期待されるようになる。」(9)

このように不況時やインフレ時には各経済主体の心理が一方向へと収束して

行き、誤った認識のもとで現実の経済とはかけ離れた状態を、あたかも現状の経済状態であるかのようにとらえてしまう。このようなとき経済主体の反応は過敏となり、われわれのモデルの示すところではカオス的な経済状態へと迷い込んでしまう。

第6章　結　語

我々は、経済主体とくに企業の予想収益率形成に関して、大多数の企業マインドが同一方向へと向き、しかも現実の経済状況に対して誤った過剰反応をすることが景気変動という現象を引き起こす主要因であると言う立場からモデル構築をした。これはモデル内の反応係数 E が大きい数値をとる場合を意味する。係数 E が大きな値を取るとは、大多数の企業が現在の収益率に照らして将来の収益率の予想を過大あるいは過小に評価する場合、あるいはそのような雰囲気が経済全体を包み込んでいるような場合であり、その場合には、企業の最適化行動が予想収益率のカオス的変動を通して経済全体にカオス的な変動を生ぜしめる可能性がある。

この種の変動の恐ろしいところは、これまでのような投資を直接間接に制御する政策では事態の本質的な部分の改善にはなんら役にたたないということである（偶然一時的に良い方向へとコントロールできるかもしれないが)。われわれのモデルではそれは係数 E をコントロールできないということで表される。したがってこのような事態に対処するためにはカオス的な変動自体を引き起こさせない政策が重要となろう。

このような状態は経済主体が現実を正確に認識できないことから発生するため、有効となる方法としては経済主体に現状についての情報を正確に早急に知らせることであろう。また同時に、経済政策の規模、実施時期等に関する情報提供によるアナウンスメント効果によっても、経済主体の心理の不安定さを緩

和することが期待できるかもしれない。いわば経済政策の副次的な効果が有効であるかもしれない。これらの政策等については今後の課題としたい。

脚 注

（1）Keynes［9］邦訳　p. 134.

（2）Keynes［9］邦訳　P. 134.

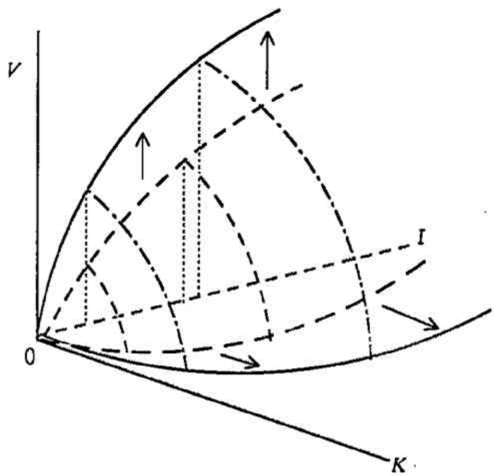
（3）Chiang［3］p. 137 and p. 144.

（4）Chiang［3］pp. 84-85.

（5）Keynes［9］邦訳　p. 145.

（6）Keynes［9］邦訳　P. 146.

（7）q_0 が上昇した場合、資本需要価格平面は外側へと広がる。



（8）Grandmont［8］. 特に　Lemma 1.3,Lemma 4.1.

（9）Keynes［9］邦訳　p. 321.

参考文献

(1) Benhabib, Jess and Richard H. Day, "A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model" *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 4, 1982.

(2) Benhabib, Jess and Richard H. Day, "Erratic Accumulation" *Economic Letter* 6, 1980.

(3) Chiang, Alpha C. *Elements of Dynamic Optimization*, McGrow-Hill, 1992.

(4) Day, Richard H. "The Emergence of Chaos from Classical Economic Growth" *Quarterly Journal of Economics*, May 1983.

(5) Day,Richard H. "Irregular Growth Cycles" *The American Economic Review* vol.72 No.3 June 1982.

(6) Devaney, Robert L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin- Cumming Publishing Company, 1986, (後藤憲一訳『カオス力学系入門』共立出版株式会社、1987.)

(7) Grandmont, Jean-Michel, "Periodic and Aperiodic Behaviour in Discrete One-Dimensional Dynamical Systems" in Benhabib, J. (ed): *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, Princeton University Press, 1991.

(8) Grandmont, Jean-Michel, "On endogenous competitive business cycles" *Econometrica*, vol. 53, 1985.

(9) Keynes, J. M. *The General Theory of Employment, Interest and Money*, Macmillan, 1936, (塩野谷祐一訳『雇用・利子及び貨幣の一般理論』東洋経済新報社, 1983.)

(10) Lorenz, Hans-Walter, *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion* Second, Revised and Enlarged Edition, Springer-Verlag, 1993.

(11) 岡本武之『雇用と分配のマクロ経済学』有斐閣, 1981.

(12) Thompson, J. M. T. and H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley & Sons Ltd, 1968, (武者利光, 橋口住久訳『非線形力学とカオス』オーム社、1988.)

(13) Tu, Pierre N. V. *Dynamical Systems*, 2nd Ed., Springer-Verlag, 1994.