在庫投資と最適経路

内上　　誠

[0] はじめに

意図的にせよそうでないにせよ、在庫投資、在庫ストックが乗数過程へ及ぼす影響、それはまさに在庫循環そのものを形成する。一般に、在庫循環とは需給不一致の単なる調整過程としてとらえられており、その不一致を表すものが在庫ストックの増減つまり在庫投資となる。またその在庫投資は企業が次期生産量決定の際のシグナルの役割をはたしているというふうに、消極的なとらえ方をされている。つまり企業が計画的に在庫投資をなしたり、在庫ストックを保有することなどはあまり考えられてこなかった。

けれどもメッツラーモデルでは、在庫はそのような生産調整の役割のほかに、企業が意図的な在庫保有のメリットを認識した上で、最適在庫ストック水準という概念を登場させた。しかしその内容は、企業がストックアウトの状況を生み出さないためや破損や返品など取引活動上必要なためという、いわば消極的な理由によって在庫が保有されることになっている。

このような消極的な在庫保有動機に対し、企業が在庫を能動的に活用・利用しようとする積極的な在庫保有動機を取り入れたのが、宇沢、小谷やブラインダー等であった。彼らによると、企業が生産計画を為す場合、決定される問題は生産量のうち、どれくらいを販売にまわし、どれくらいを在庫として次期へと繰り越すかという2つである。この2つの問題が決定されれば同時に生産量も決定される。この問題に関する研究としては宇沢［5］がある。さらに在庫保有費用を明示的に導入し、上記の決定問題を明らかにしたものとしてはブラインダー［2］と小谷［6］がある。

ところで、メッツラーモデルでは需要側と供給側の相互関係から在庫循環を考察していたが、企業の最適化行動から在庫循環を考えるステージに達すると、一方では独占企業が仮定され、需要側の要因は2次的なものに後退した。他方では需要変動を外生的なショック要因として与えてしまい、供給側からの需要側へのフィードバック経路は閉じられてしまう。

その後ブラインンダーはメッツラーの研究業績を高く評価し、需要側と供給側の相互作用の必要性を強調している。

本論文は、このブラインダーの指摘にならい、再び需給関係から在庫とその影響を再考しようとするものである。以下ではまず宇沢、小谷、ブラインダーによる最適化モデルをデマンド側を反映したものへと変更する。次に意図されない在庫投資をモデルに取り入れ、その存在の影響を考える。一見すると、コントロール不可能であるように思われるが、実際には最適経路が存在することが示される。

［1］基本的な関係

ある期（たとえばt）における事前的な需要D^e_tは予想消費C^e_t、予想設備投資I_t、意図された在庫投資ΔZ_tの合計であるから、

（1）$D^e_t = C^e_t + I_t + \Delta Z_t$

と表すことができる。また企業の生産計画Y_tがこのD^e_tに一致するように行われるとするなら、

（2）$Y_t = D^e_t$

となる。一方企業の販売X^e_tは、

（3）$X^e_t = C^e_t + I_t$

である。よって、

（4）$Y_t = X^e_t + \Delta Z_t$

とかくこともできる。また、生産と販売と在庫投資との間には、

（5）$\Delta Z_t = Y_t - X^e_t$

の関係が成立していることも分かる。この式は次のように読まれるべきである。

もし$Y_t > X^e_t$であるなら、生産過剰部分は意図された在庫投資の増加であり、$Y_t < X^e_t$であれば生産の不足分は意図された在庫投資の減少で賄われている。

なお、添え字eが付いている変数は事前量と事後量は同じであるが、添え字eが付いていない変数は事前量と事後量が異なる可能性があることを表す。

一方、事後的な実際の需要D^aは実際の消費C^aとIとΔZの合計であり、

（6）$D^a_t = C^a_t + I + \Delta Z_t$

となる。また、意図されない在庫投資ΔZ^a_tは実際の生産Y_tと実際の需要D^a_tとの差であるため、

（7）$\Delta Z^a_t = C^e_t - C^a_t$

ということとなり、結局事後的な消費と事前的な消費との差ということになる。

ここで実際の（事後的な）消費を今期の実際の生産に限界消費性向c（ただし$0 < c < 1$、一定とする。）を掛けたものとすれば、

（8）$C^a_t = c\,Y_t$

他方、今期の予想消費C^e_tが前期の実際の消費に等しいとするなら、

（9）$C^e_t = c\,Y_{t-1}$

となり、（1）（3）は

（10）$D^e_t = c\,Y_{t-1} + I + \Delta Z_t$

（11）$X^e_t = c\,Y_{t-1} + I$

となる。したがってt期にはX^e_tは所与となる。また、（7）は、

（12）$\Delta Z^a_t = c\,(\mathrm{Y}_{t-1} - \mathrm{Y}_t)$

となる。

［2］利潤最大化行動

企業が将来にわたる利潤の割引現在価値Vを最大にすることを目標としているとするなら、次の式が成り立つ。

$$Max\ V = \int_{t=0}^{\infty} [pX_t^e - A(Y_t) - B(Z_t)]\ exp\ (-rt)\ dt$$

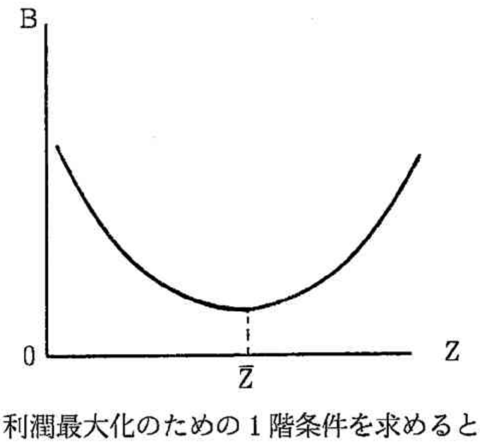
制約条件は（5）より、

(13) $\dot{Z} = Y - X^e$

である。ただしここでは微分形で表している。未定乗数を $\lambda\ exp\ (-rt) = \delta$ としてハミルトン関数Hを作ると、

(14) $H = [pX_t^e - A(Y_t) - B(Z_t) + \lambda(Y_t - X_t^e)]\ exp\ (-rt)$

再述するが（13）のZは意図された在庫投資を表す。問題はこのVを最大化することにある。ただし、pは価格であり、一定と仮定する。pX^eは予想販売収入額を表す。$A(Y)$は生産費用関数であり$dA / dY > 0$、$d^2A / dY^2 > 0$という性質を有するものとする。また$B(Z)$は在庫保有費用であり、ここでは実際の在庫保有量Zの関数と仮定される。ただしその性質は図－1のようなU字形とする。つまり、保有費用が最低となる在庫ストック量$\bar{Z} > 0$が存在し、$Z \gtreqless \bar{Z}$なら$dB / dZ \gtreqless 0$、$d^2B / dZ^2 > 0$である。その他、rは利子率であり、割引率として用いられる。



図－1

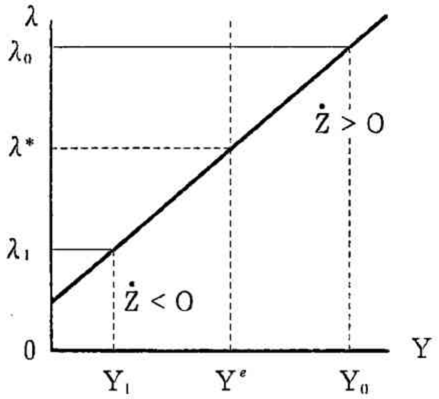
（14）より利潤最大化のための1階条件を求めると、

(15) $A'(Y) = \lambda$

(16) $\dot{\lambda} = r\lambda + B'(Z)$

(17) $\lim_{t \to \infty} \delta Z = 0$

となる。（15）の意味は図－2にあるように、λを与えると生産量Yが決定されることを表す。つまり、ある$\lambda = \lambda_0$にたいして生産量Y_0が決まり、そのうち一部がX^eに用いられ、残り（つまり（13））が意図されたプラスの在庫投資ということになる。逆に$\lambda = \lambda_1$の場合には販売に対して1部分を生産で、残りを在庫の放出で賄おうとすることになる。この場合のマイナスの在庫投資も意図的なものである。$Y = X^e$において在庫投資はゼロとなる。便宜上このときのλをλ^*とする。



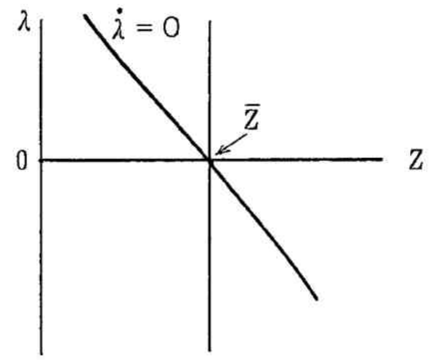
図－2

このように Y は λ によって一意的に決定されるため、

(18) $Y = Y(\lambda)$

と置くことができる。

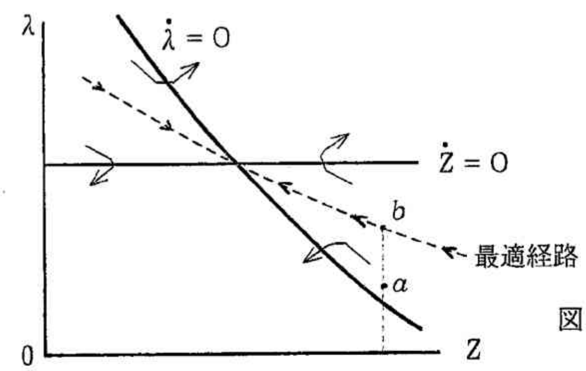
(16) は λ の挙動を表す。この関係を図示すると、図－3のようになる。しかしここでマイナスの λ は経済的に意味をなさないため、マイナス部分は取り除くこととする。



図－3

(17) は横断条件であり、最適経路の表す。

以上の (13) (16) とから、この体系の性質を分析すると、図－4のような *saddle point* 形となる（計算注1）。



図－4

もし初期値が a にあるなら、コントロール変数 λ を b へと移動すれば経済を最適経路へ乗せることができ、その後は Z と λ の相互の関係により長期均衡点へと到達する。ここで λ をコントロールするということは結局生産をコントロールすることにほかならない。またもし経済が d 点にある場合には、同様に λ を e 点へと移動すれば良い。そしてそのようなコントロールの動機は企業の利潤最大化行動から生ずる。

以上の議論は式からも分かるように、企業が予測した消費がそのまま実現することが仮定されている。そのため意図されなかった在庫投資は発生しない。このような場合は企業が利潤を最大にするように行動するなら、経済は長期均衡へと落ちつくこととなる。

[3] X^e が変化する場合

前節（2）の結果はあくまで X^e 一定の場合の結果である。そこで次に X^e が（11）にしたがって変化する場合を考える。ただ（11）は差分形であるため、テーラーの定理を用いて微分形に直すと、

(19) $c\,Y_{t-1} = Y - \dot{Y}$

である。ここで（18）を時間微分し（19）に代入し、さらにこれを（13）に代入し整理すると、

(16) $\dot{\lambda} = r\,\lambda + B'(Z)$

(20) $\dot{Z} = (1-c)\,Y + (r\,\lambda + B'(Z))\,Y' - I$

となる。この体系もやはり *saddle point* 形となる（計算注2）。

[4] 意図されない在庫投資の存在

以上の議論はあくまで事前的な需要がそのまま事後的な需要となる場合、あるいは需要予測が完全である場合に成立する。しかし在庫循環という視点からすると需要を正確に予測できないことこそが重要であり、需給ギャップこそが在庫循環そのものである。そこで以下では需要を完全に予測できないモデルを考え、意図されない在庫投資の存在が最適制御にもたらす影響を考える。

これまで（13）に表れる在庫投資は意図されたもののみであるから、意図されない在庫投資を含むように（13）を修正しなければならない。意図されない在庫投資は（7）によって定義されるため、意図された在庫投資と意図されない在庫投資の合計を $\dot{Z}^b$ とするなら、$\dot{Z}^b = \dot{Z} + \dot{Z}^a$ となる。ここで（5）あるいは（13）と（7）の関係を用い、さらに（4）（6）を代入すると、

$$\dot{Z}^b = Y - X^e + X^e + \dot{Z} - (c\,Y + I + \dot{Z})$$

整理すると、

(21) $\dot{Z}^b = (1-c)\,Y(\lambda) - I$

を得る。

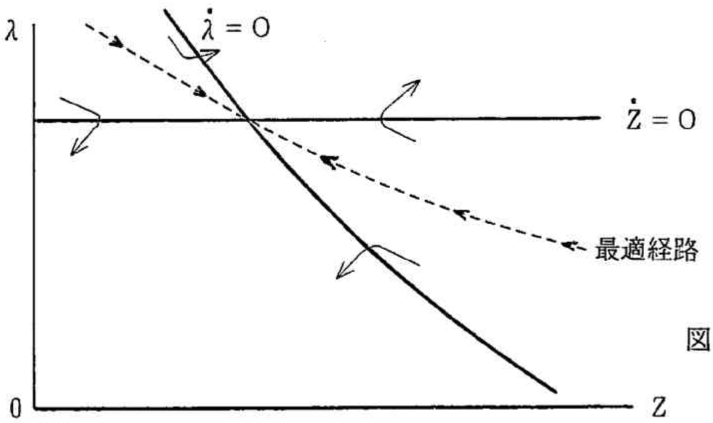
[5] 意図されない在庫投資と最適経路の存在

在庫蓄積方程式は (21) であるが λ 方程式は何等変化しない。ただ在庫保有費用は実際の在庫ストックに関係するため $B'(Z)$ としている。それゆえ考察する体系は、

(16) $\dot{\lambda} = r\lambda + B'(Z)$

(21) $\dot{Z}^b = (1-c)\,Y(\lambda) - I$

となる。この体系は *saddle point* 形となる（計算注3）。したがって最適経路が存在することになる。また均衡点は $Y = I/1-c$ となる。(図－5参照)



図－5

このように意図されない在庫投資が存在する場合であっても、企業は在庫をうまく調整し得ることになるが、そうであるなら実際に観察される在庫投資循環をいかに説明するかという問題が残る。先述のように、在庫投資の動きは一般的に需給ギャップの動きを表すものと考えられているが、われわれのモデルでは在庫投資はコントロール可能であり、最適経路上を一様に均衡へと収束させることができるため、その過程では循環的な変動は起こらない。しかしこの問に関するヒントは、長期均衡点が一定の設備投資によって形成されているという点に潜んでいると思われる。つまり、むしろ在庫循環とは設備投資の変動によって生み出されるものと考える方が良いかもしれない。

[6] 結　語

われわれは、ブラインダーの指摘にもあるように、在庫（投資、ストック）の影響等を考察する場合、需要側の要因が重要であるという立場から、需要側と供給側との互いのフィードバック関係を重視して議論を展開した。この結果、これまで扱えなかった意図されない在庫投資を扱うことができるようになる。在庫（循環）に関する近年の傾向としては、意図された在庫投資、在庫ストックは研究対象とされるが、意図されない在庫投資、在庫ストックの影響はほとんど考察されていない。われわれはこの点に関して、経済にとって悪影響（不安定さを増すという意味で）を及ぼすのはまさに意図されない在庫投資・ストックの方であるという考えから、モデル内に意図されない在庫投資を取り入れた。

しかし、結果的には、意図されない在庫投資を取り入れた場合でも、最適経路が存在することとなり、企業は最適な状況へとコントロールすることができる。

これはあくまで意図されない在庫投資でも次の時点ではその存在が判明し、その時点でコントロールして行くためである。

メッツラーは経済主体の最適化行動を明示的には取り入れなかったが、意図されない在庫投資と意図された在庫投資（最適在庫ストック水準を維持するため）の存在が在庫循環の原因であることをすでに指摘している。けれども本論文の結論では在庫投資はコントロール可能であるため、在庫循環の原因は別のところに求めるべきかもしれない。

（計算注）

計算注1　　位相図について

基本的な連立微分方程式は、

$$\dot{\lambda} = r\lambda + B'(Z)$$

$$\dot{Z} = Y - X^e$$

である。ここで均衡点を（λ^*, Z^*）とし、均衡近傍で線形近似すると、

$$\begin{vmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & B'' \\ Y' & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda - \lambda^* \\ Z - Z^* \end{vmatrix}$$

を得る。また α を根とし、特性方程式を導き出すと、

$$\alpha^2 - r\alpha - B'' Y' = 0$$

これより、

判別式 $\Delta = r^2 + 4B'' Y' > 0$

$Det = -B'' Y' < 0$

となるため、均衡点は鞍点となる。

計算注2　　位相図について

基本的な連立微分方程式は、

$$\dot{\lambda} = r\lambda + B'(Z)$$

$$\dot{Z} = (1-c)Y + (r\lambda + B'(Z))Y' - I$$

である。ここで均衡点を（λ^*, Z^*）とし、均衡近傍で線形近似すると、

$$\begin{vmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & B'' \\ (1-c+r)Y' & B''Y' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda - \lambda^* \\ Z - Z^* \end{vmatrix}$$

特性方程式は、

$$\alpha^2 - (r + B''Y')\alpha - (1-c)B''Y' = 0$$

を得る。

判別式 $\Delta = (r + B''Y')^2 + 4(1-c)B''Y' > 0$

$Det = -(1-c)B''Y' < 0$

より均衡点は鞍点となる。

計算注3　　位相図について

基本的な連立微分方程式は、

$\dot{\lambda} = r\lambda + B'(Z)$

$\dot{Z} = (1-c)\,Y(\lambda) - I$

である。均衡点を（λ^*, Z^*）とし、均衡近傍で線形近似を施し、特性方程式を求めると、

$$\begin{vmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & B'' \\ (1-c)\,Y' & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda - \lambda^* \\ Z - Z^* \end{vmatrix}$$

$$\alpha^2 - r\alpha - (1-c)\,Y'B'' = 0$$

を得る。

判別式 $\Delta = r^2 + 4(1-c)\,Y'B'' > 0$

$Det = -(1-c)\,Y'B'' < 0$

より均衡点は鞍点となる。

参考文献

［1］Blanchard, Olivier Jean and Stanley Fischer, *Lectures on Macroeconomics*, The Mit Press, 1989.

［2］Blinder, Alan S. *Inventory Theory & Consumer Behaviour*, Narvester Wheatsheaf, 1990.

［3］Chiang,, A. C., *Elements of Dynamic optimization*, McGraw Hill, 1992.

［4］Metzler, L. A. *Collected Paper*, Cambridge Massachusetts, Harvard University Press, 1973.

［5］宇沢弘文『経済動学の理論』東京大学出版会、1986.

［6］小谷　清『不均衡理論　－ワルラス均衡理論の動学的基礎－』東京大学出版会、1987.

［7］和田貞夫『動態的経済分析の方法』中央経済社、1989.