近畿大学短大論集
第33巻 第1号（2000年7月）
p.1～5

販売制約下における最適化行動

*内 上 誠

Optimal behavior under constrained Sales

Makoto Uchigami

Abstract.

This paper presents models of Optimal behavior by firm at that sales of the firm are constrained. Two cases are proposed : the former is a case that there exists excess demand and sales is constrained by Inventory stocks, the latter is a case that sales is equal to demand less than Inventory stocks. In both cases Conditions of optimal behavior are the same as Blinder presents. But at the second case, optimal solution does not realise due to the nonnegativity restriction of Inventory stocks.

Key words.

Optimal behavior, Constrained sales

［1］はじめに

本稿の目的は、企業の販売が制約される場合に、最適行動が可能かどうかを考えることにある。販売制約としては次の2つのケースを想定する。大量の需要があるにもかかわらず販売し得る財が少ないケース。販売可能な財が多数存在するにも関わらず、需要が少ない場合。とくに前者についてはbacklogを想定していないため、超過需要はすべて失われることとなる。なお、仮定については、Abel［1985］モデルを基本においている(1)。

最も特徴的な仮定は、生産ラグにある。考察される財はすべてstorableであると仮定し、さらに、ある時点において販売可能な生産量は、前時点に生産された生産物と売れ残りの合計であるとする。つまり今時点に生産された生産物は今時点には販売されない。

仮定の関係を明示するため期間を用いて表すと以下のようになる。ただし、生産をY、在庫ストックをZ、販売をSとする。

$$Z_{t+1}=Y_t+Z_t-S_t \tag{1}$$

t期の生産Y_tはすべてt＋1期の在庫ストックZ_{t+1}となり、t期の販売S_tはt期の在庫ストックZ_tでまかなわれることをZ_t-S_tが表している。もし$Z_t>S_t$（売れ残り）が発生すれば、その分も次期在庫ストックに繰り越される。$Z_t<S_t$となるならbacklogの問題が発生するが、本稿ではこれらについては触れない。

* 短期大学助教授

(1)Abel［1985］は、需要側に確率変数を取り入れ、全体を確率モデルにすることで、ストックアウトのあるケースとないケースの両方を同時に分析している。主要な点は、費用関数が線形であってもプロダクト・スムーシングが成立すること、最適条件がケースによってブラインダーとは異なること、およびこれらの結論が生産ラグの存在に大きく依存していることである。

［2］２つの在庫蓄積方程式

販売に関しては次のような仮定をおくが、その内容は Abel［1985］とはことなる。

$$S = \min(Z, D) \quad (2)$$

Dは需要を表す。ただし、需要に関しては所得や価格の関数と考えることが十分可能であり、むしろ望まれるかもしれないが、モデルをシンプルにするという立場から、需要は外生的に与えられ、しかも各時点で一定と仮定する。

(2)より販売はこの時点（初め）に存在する在庫ストックと需要によって制約され、両者の中から、ショートサイドの方が選ばれる。前述の通り backlog については考察しないため、$Z<D$ のときには販売量SはZが限界となる。他方、$Z \geq D$ の場合はDが販売可能量となり、その差は売れ残りとなるため、それらはすべて次期の在庫ストックへと繰り入れられる。

販売についてこのように想定すると、在庫蓄積方程式は次の２つのものが導き出される。

もし、$Z<D$ であるような場合、$S=Z$ となるため、これを(1)に代入すると、

$$Z_{t+1} = Y_t$$

がつねに成立する。つまり売れ残りによる在庫蓄積は存在しない(2)。

これより両辺から Z_t を引くと、

$$Z_{t+1} - Z_t = Y_t - Z_t$$

さらに微分形に直し、混乱が無い限り t を取り除くと、

$$\dot{Z} = Y - Z \quad (3)$$

となり、これが $Z<D$ の場合の在庫蓄積方程式となる。

他方、$Z \geq D$ である場合には、$S=D$ であるから、これを(1)に代入すると、

$$\dot{Z} = Y - D \quad (4)$$

となり、これが $Z \geq D$ の場合の在庫蓄積方程式となる。

(2) この関係がつねに成立するためには、暗黙の中に大量の需要がつねに背後に存在していることを想定していることになる。

［3］最適条件と運動方程式

企業は利潤を最大とするように行動すると仮定する。このとき企業が選択するものは最適生産量である。

Yを生産量とし、pを生産物価格とする。ただし、$p>0$ で一定と仮定する。pS は販売収入を表す。費用関数を $C(Y)$ とするが、次の性質を持つものとする。

$C(0)=0,\ C'(Y)>0,\ C''(Y)>0$

在庫ストックの保持費用を $B(Z)$ とする。ここでも費用関数と同様、

$B(0)=0,\ B'(Z)>0,\ B''(Z)>0$

を仮定しておく。

以上より考察すべき対象はつぎの式となる。企業は利潤の現在割引価値合計Vを最大にすることを目標にしているものとする。$r>0$ は利子率であり、割引率とする。

$$\max V = \int_0^{\infty} [pS - C(Y) - B(Z)] e^{-rt}\, dt \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{Z} = Y - S \quad (6)$$

$$-Z \leq 0 \quad (7)$$

$$Z(0) = Z_0 > 0 \quad (8)$$

$$Y \in [0, \infty) \quad (9)$$

(7)はZが nonnegative である条件を表す。これは backlog を考慮しないためである。(8)は在庫ストックの初期値を表す。(9)は生産量が nonnegative であることを表す。さらに横断性条件が付加される。

【$Z<D$ のケース】

まず、$Z>D$ のケースを考える。この場合 $S=Z$ である。Zに関する制約条件等を考慮し、さらに(6)を(3)とすると、考察すべき問題は次式となる。

$$\max V = \int_0^{\infty} [pZ - C(Y) - B(Z)] e^{-rt}\, dt + \mu(Y-Z) + \kappa(Y-Z) \quad (10)$$

(3) これは state-space constraints と呼ばれるものであり、Kamien and Schwarts［1991］Sec.17, Chiang［1992］pp.298－314 に詳しい。

ここでκ（・）はZに関する制約条件(7)から導き出せる(3)。

ここで、

$$\mu e^{rt}=\lambda,\ \kappa e^{rt}=\theta$$

とし、(10)をハミルトン関数Hの形にすると、

$$H=[pZ-C(Y)-B(Z)+\lambda(Y-Z) +\theta(Y-Z)]e^{-rt} \quad (11)$$

となる。この(11)を用いて最適化の条件を求める。

(c-1) $H_y=-C'(Y)+\lambda+\theta=0$

$Y\geqq 0,\ Y\cdot H_y=0$

(c-2) $H\theta=Y-Z\geqq 0,$

$\theta\geqq 0,\ \theta(Y-Z)=0$

(c-3) $Z\geqq 0,\ \theta Z=0$

(c-4) $\dot{\theta}\leqq 0$（$Z>0$ のとき 0）

(c-5) $\dot{Z}=H\mu=Y-Z$

(c-6) $\dot{\mu}=-Hz$

そして横断性条件として、

$$\lim_{t\to\infty} Z\mu=0$$

ただし、$Ax=\partial A/\partial x$ である。

まず、$Z>0$ である領域を考える。θ は $Z=0$ のときその効果が発揮されるから、いまの場合は取り除いて良い。すると、(c-1)より、

$$C'(Y)=\lambda \quad (12)$$

また、(c-6)は、

$$\dot{\lambda}=-p+B'(Z)+(1+r)\lambda \quad (13)$$

となる。

(12)および(12)を時間で微分したものを(13)へ代入すると、

$$\dot{Y}=[-p+B'(Y) +(1+r)C'(Y)]/C''(Y) \quad (14)$$

を得る。よって、$Z>0$ である場合の運動方程式は(c-5)と(14)である。

【$Z>D$ のケース】

次に、$Z>D$ つまり $S=D$ であるケースを考える。先ほどと同様にすると、考察すべき問題は次式となる。

$$\max V=\int_0^{\infty}[pD-C(Y)-B(Z)]e^{-rt}dt +\phi(Y-D)+\phi(Y-D) \quad (15)$$

ここで、

$$\phi e^{rt}=\gamma,\ \phi e^{rt}=\eta$$

とし、(15)をハミルトン関数Hの形にすると、

$$H=[pD-C(Y)-B(Z)+\gamma(Y-D) +\eta(Y-D)]e^{-rt} \quad (16)$$

となる。この(16)より最適化条件は、

(c-7) $H_y=-C'(Y)+\gamma+\eta=0$

$Y\geqq 0,\ Y\cdot H_y=0$

(c-8) $H_\eta=Y-D\geqq 0,$

$\eta\geqq 0,\ \eta(Y-D)=0$

(c-9) $Z\geqq 0,\ \eta Z=0$

(c-10) $\dot{\eta}\leqq 0$（$Z>0$ のとき 0）

(c-11) $\dot{Z}=H_\phi=Y-D$

(c-12) $\dot{\phi}=-H_z$

最後に横断性条件として、

$$\lim_{t\to\infty} Z\phi=0$$

となる。

ここでも、まず $Z>0$ 領域を考えるため、$\eta=0$ とする。(c-7)より、

$$C'(Y)=\gamma \quad (17)$$

(c-12)は、

$$\dot{\gamma}=B'(Z)+r\gamma \quad (18)$$

となる。

(17)と(17)を時間で微分したものを用いて(18)へ代入すると、

$$\dot{Y}=[B'(Y)+rC'(Y)]/C''(Y) \quad (19)$$

となり、これと(4)または(c-11)が $Z>0$ である場合の運動方程式となる。

［4］位相図

各ケースの位相図を用いて両者を比較する。

【$Z<D$ のケース】

(14)と(c-5)を均衡近傍で線形近似し、特性方

程式を求めると[4]、

$$\alpha^2 - r\alpha + [(1+r) = B''/C''] = 0$$

ここでαは根を表す。仮定として、

$$(1+r)C'' < B''$$

とするなら、判別式Δとデタミナント D は、

$\Delta = r^2 - 4[(1+r) - B''/C''] > 0$

$D = [(1+r) - B''/C''] < 0$

となるため、均衡点は鞍点となる。

位相図は Fig.1 となる[5]。

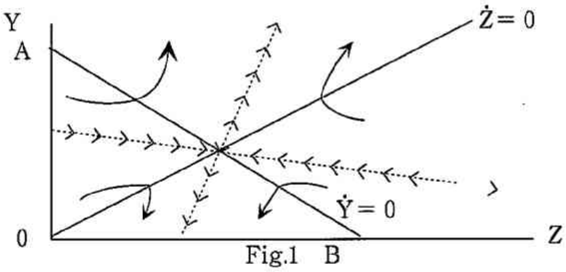

Fig.1

点AおよびBは、

$$A : p(1+r)^{-1} = C'(Y)$$

$$B : p = B'(Z)$$

である。

Fig.1 からも分かるように在庫ストック Z がゼロとなることは決してない。したがって Z に対する制約は作用しないことになる。

【Z>D のケース】

(19)と(c-11)を用いて、同様に特性方程式を求めると[6]、

$$\alpha^2 - r\alpha - [B''/C''] = 0$$

となる。判別式Δとデタミナント D は、

$\Delta = r^2 + 4[B''/C''] = 0$

$D = -[B''/C''] < 0$

を示すため、均衡点は鞍点となり位相図は Fig.2 のように描くことができる。

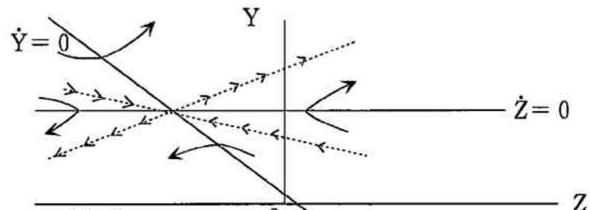

Fig.2

このケースでは経済が均衡へと収束することはない。在庫ストックに関する制約のため、経済が Z=0 を越えることはできない。Z=0 での Y の動きは、次のようになる。

(c-7)より、

$$\gamma + \eta = C'(Y)$$

これを時間で微分すると、

$$\dot{\gamma} + \dot{\eta} = C''(Y)\,\dot{Y}$$

これに(18)を代入し、さらに先ほどの $\gamma = C'(Y) - \eta$ を用い整理すると、

$\dot{Y} = B'(Z) + r(C'(Y) - \eta) +$

ところが Z = 0 であるため $B'(Z) = 0$ となり、

$\dot{Y} = [B'(Z) + r(C'(Y) - \eta) + \dot{\eta}\ ]/C''(Y)$ が得られる。(c-10)より $\dot{\eta} < 0$ であるため、

$$rC'(Y) - r\eta + \dot{\eta}$$

の値により Y の動きが決まる。

しかし条件(c-8) $\eta(Y-D)=0$ から、

$$Y = D$$

が成立しなくてはならないため、最終的には $Z=0$、$Y=D>0$ へと収束する。

(4)基本となる式は次の 2 つである。

$\dot{Y} = [-p + B'(Y) = [-p + B'(Y) + (1+r)C'(Y)]/C''(Y)$

$\dot{Z} = Y - Z$

均衡点を(Y^*, Z^*)とし、均衡近傍で線形近似すると、

$$\begin{vmatrix} \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+r & B''/C'' \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y - Y^* \\ Z - Z^* \end{vmatrix}$$

となる。根をαとすると特性方程式は、

$$\alpha^2 - r\alpha + [(1+r) - B''/C''] = 0$$

となる。ただし、$dC''/dY = 0$ としている。

(5)図中にある補助線については和田[1990]を参照。

(6)次の 2 本の微分方程式を考える。

$\dot{Y} = [B'(Y) + rC'(Y)]/C''(Y)$

$\dot{Z} = Y - D$

均衡点を(Y^*, Z^*)とし、均衡近傍で線形近似すると、

$$\begin{vmatrix} \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & B''/C'' \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y - Y^* \\ Z - Z^* \end{vmatrix}$$

となる。根をαとすると特性方程式は、

$$\alpha^2 - r\alpha - [B''/C''] = 0$$

となる。ただし、$dC''/dY = 0$ としている。

［5］結語

本稿では Abel ［1985］ を参考にし、販売制約のある場合の最適経路について考察した。大量の需要が背後に保証される場合には、利潤の割引現在価値を最大にするような経路が存在し、生産と在庫ストックはプラスの水準で均衡へと達する。ところが、需要が少なく需要によって販売が制約する場合には、最適経路が存在するものの、均衡はマイナスの在庫ストック水準に存在する。もし、われわれのモデルが backlog を認めているなら、最適経路を通じて均衡へと達するが、われわれは backlog を認めないため、在庫ストックに non-negative な制約を設けている。このような経済では在庫ストックがゼロのまま、生産水準のみが変化する。条件(c-8)より最終的に需要に等しい生産水準へと収束することになる。

参考文献

(1) Abel, A. B., "Inventories, Stock-outs and Production Smoothing" , Review of Economic Studies, [1985].

(2) Blanchard, O. J., Lectures on Macroeconomics, The MIT Press, [1989].

(3) Chiang, A. C., Elements of Dynamic Optimization, McGraw-Hill, [1992].

(4) Kamien, M. I. and N. L. Schwartz, Dynamic Optimization, 2ed., North-Holland [1991].

(5) Sargent, T. J., Dynamic Macroeconomic Theory, Harvard University Press, [1987].

(6) 和田貞夫「動態的経済分析の方法」中央経済社 [1990]