

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

昭和25年4月12日現在

機関番号：3 4 4 1 9  
研究種目：基盤研究(C)  
研究期間：2009～2012  
課題番号：2 1 5 4 0 0 5 4  
研究課題名（和文）数論的視点による局所環の研究

研究課題名（英文）Research of local rings from number-theoretic view point

研究代表者  
泉 脩藏 (IZUMI SHUZO)  
近畿大学・理工学部・研究員  
研究者番号 8 0 0 2 5 4 1 0

研究成果の概要（和文）：  
M. イッケル、T. 伊藤との共同により、最初の課題とした局所環に対するディオファントス不等式を、もっとも一般的な形、すなわち優秀 Hensel 整域に対して示すことができた。次に Bos と Calvi によって発見された、滑らかな平面代数曲線現れる埋め込みの特異点の代数的解明と一般化を行った。さらにアファイン空間に埋め込まれた解析曲線の超越性指数の評価まで理論を進めた。

研究成果の概要（英文）：  
We, M. Hickel, T. Ito and I, succeeded to prove Diophantine inequality for excellent Henselian domains, this may be the most general kind of local rings for the inequality. Next, I gave an algebraic explanation and a generalisation of the singularities of embeddings of plane algebraic curves found by Bos and Calvi. Using this theory, I have obtained an estimate of transcendency index of analytic curves embedded in affine spaces.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合 計
2009	800,000	240,000	1,040,000
2010	800,000	240,000	1,040,000
2011	800,000	240,000	1,040,000
2012	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総 計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学  
科研費の分科・細目：数学、代数学  
キーワード：環論

1. 研究開始当初の背景

数論と代数幾何学・可換環論に関してはいろいろな類似性が知られている。代表者は主として幾何学的、あるいは解析学的関心を持って、特異点における函数の位数の性質を研究を行ってきた。しかしその性質が、零評価を通じて超越性理論に関係し、また付値に関する基礎不等式を通じてディオファントス不等式に関係していることが判明した。これらをまとめて数論とのアナロジーを探索の研究を開始した。
2. 研究の目的

(1) T. 伊藤との共著で、すでに等標数優秀ヘンゼル局所環に対して得ていた環に対するディオファントス不等式の一般化。  
(2) Bos 氏と Calvi 氏によって平面代数曲線に対して考案された、アファイン空間に埋め込まれた多様体上でのテイラー展開の一般化。  
(3) (2)に現れる埋め込みの特異点の意味の代数的な解明。

### 3. 研究の方法

狭く深い研究よりも、広い分野の基礎知識をもとに研究することを選ぶ。このため代数学に限らず、諸分野の研究会に出席し、多くの人と討議して研究を進める。書籍等の資料はこの研究の終了後も引き続き使用する可能性が強いので、この研究に必要であっても自費で買い、この補助金は主として直接の交流による情報授受に充てることにした。

### 4. 研究成果

(1) この科研費申請以前より、ディオファントス不等式の一般化について、M. イッケル氏、T. 伊藤氏との共同により研究中であった。この仕事に先行して、まず G. ロン氏が収束べき級数環の商環に対して、ついでイッケル氏と伊藤-泉が独立に、等標数優秀ヘンゼル局所整域  $A$  の商体  $K$  に対して、その上の  $m$  付値がディオファントス不等式を満たすことを示した。つまり  $K$  の完備化の元で  $K$  上代数的なものは、もし  $K$  の元でなければ、 $K$  の元で効率的に近似されないという結果を得た。これはジーゲル、スー、ロスなどの諸氏が有理数体で示した定理の類似となっている。今回はこれが、等標数という条件なしでも成立することを示した。これらの結果は、また M. アルチン氏の「解析的方程式に対する近似定理」という非常に有用な定理の近似度を測る函数を線形函数に強化する定理、つまり「線形アルチン型近似定理」と呼ばれるものを、 $A$  係数 2 未知函数代数方程式系に対して与えている。この研究を始めてまもなく論文掲載許可が出た。

(2) 補間法の専門家である L. ボズ氏と P. カルビ氏は、なめらかな平面代数曲線  $C$  の上の点で、 $C$  上の解析関数を近似する  $d$  次の多項式函数を対応させるという意味での「テイラー展開」を考察した。そして補間法の大家 C. ド・ブーア氏と A. ロン氏の「初項形式(最少項)による補間の方法」を援用して、 $C$  の有限個の点を除いてテイラー展開がうまく定義できることを示した。代表者は、最小項による補間の方法に加えて、シュバルツの超函数や偏微分方程式系のプロロンゲーションの言葉を援用して、ボズ氏とカルビー氏の結果を一般化する次の結果(論文査読中)を得た：

『 $X$  をアフィン空間に埋め込まれたなめらかな解析的な曲線とすると、 $X$  の疎な解析部分集合の点を除けば、 $d$  次のテイラー展開はうまく定義できる。』

(3) (2)の考察に用いた議論は次のような一般的理論を導く。

一般の複素アフィン空間の連結開集合  $U$  上の正則函数からなる有限次ベクトル空間  $Z$  に対して、その元の初項形式の張る多項式環の部分ベクトル空間は、疎な解析的ザリスキ閉集合の点を除いて得られる解析的開集合  $S$  上で、偏微分に関して閉じている。するとその点での  $Z$  の元の芽の集合は正則函数の芽の環の剰余環としての構造を持つことになる。従って  $U$  の一般的な点に対して、次数付アルチン環が対応し、点が動くとそのアルチン環の変形が与えられる。このアルチン環の性質、 $Z$  との関係などの課題が生じるが、一部分を解決した。

(4) ①(1)の仕事とは少し違う角度で、数論で考察された問題で幾何学的に興味深いものがある。 $d$  次の多項式は、恒等的に零でなければ、たかだか  $d$  重の根しか持ち得ない。 $x$  と  $\exp x$  の  $d$  次多項式は、恒等的に零でなければ、たかだか  $d$  の2次の函数のオーダーの重根を持つ。このような根の重複度の評価は「零評価」とよばれ、超越数論では基本的な道具となっている。

②代表者は以前、局所  $K$  代数の極大イデアルの生成系  $F$  を定め、 $F$  の元の  $K$  係数  $d$  次多項式の位数の取り得る有限値の最大値を調べた。そして「その最大値の増大度の  $d$  に関するオーダーが 1 である」ことと、「生成元が  $K$  上に生成する多項式環の  $K$  上の超越次数が  $\dim A$  に等しい」ことの同値性を示した。つまりその「増大度の  $d$  に関するオーダー」は  $F$  による特異点のアフィン空間への埋め込みの超越性の尺度「超越指数」を与える。

③アフィン空間に埋め込まれた解析的多様体  $X$  の場合、(3)を用いると  $d$  次の多項式函数のなすベクトル空間  $P(d)$  が任意の  $d$  に対して環の構造を持つような点では、この指数が上からのエフェクティブな評価を持つことがわかる。

④また、任意の  $d$  に対して  $P(d)$  が(3)の意味で環の構造を持つ点は十分一般的である。つまりそれらの点のなす集合  $S$  の補集合は  $X$  のルベークの意味で零集合で、ベールの第一カテゴリーに属する。

⑤まとめると、我々は  $X$  の一般的な点では埋め込みの超越性はあまり高くないという結果を得る。この評価はガブリエロフ氏がネータリアン函数のカテゴリーに限定して得た定理から導かれる結果を一般の解析的カテゴリーまで一般化し改良するものとなっている。

(5) 全体を見ると、環論、代数幾何、函数論、幾何、補間法、微分解析、位相ベクトル空間等の基本知識をこれまでにない方法で擦り合わせたもので、新しい多くの問題を提供している。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計 1 件)

- ① Michel Hickel, Hirotada Ito, Shuzo Izumi,  
Note on Diophantine inequality and Linear Artin Approximation over a local ring,  
Comptes rendus mathématique de l'Académie des sciences, Paris, 査読有,  
Ser I, Vol. 347 (2) 2009, pp.473-475

### 〔学会発表〕(計12件)

- ① 泉 脩藏,  
「アファイン空間に埋込まれた解析多様体上のテイラー展開と超越性」,  
2013年日本数学会年会,  
2013年03月21日,  
京大吉田キャンパス
- ② 泉 脩藏,  
「正則関数の有限次元ベクトル空間に付随するアルチン環の族」,  
2013年日本数学会年会,  
2013年03月21日,  
京大吉田キャンパス
- ③ 泉 脩藏,  
「複素多様体のアファイン埋込の超越指数」,  
第20回沼津研究会,  
2013年03月06日,  
沼津工業高等専門学校
- ④ Shuzo Izumi,  
「Generic tameness of embedding of an analytic manifold」,  
熱帯幾何学セミナー,  
2012年10月24日,  
パリ第六大学ジュッシュー数学研究所 (フランス)
- ⑤ Shuzo Izumi,  
「Local properties of embeddings of manifolds」,  
特異点セミナー,  
2012年10月18日,  
エクス・マルセイユ大学 FRUMAM (フランス)

- ⑥ 泉 脩藏,  
「解析集合芽の  $C_m$  への埋込の不変量」,  
第10回アフィン代数幾何学研究集会,  
2012年09月06日,  
関西学院大学 大阪梅田キャンパス

- ⑦ Shuzo Izumi,  
「Higher order tangent spaces of an embedded complex manifold and Taylor projectors」,  
AMS Sectional Meeting AMS,  
Special Session on Singularities, Stratifications and Their Applications,  
2012年3月4日,  
ハワイ大学マノア校 (米国)

- ⑧ Shuzo Izumi,  
「Projector onto a finite dimensional vector subspace of  $O_n, a$ 」,  
第四回日豪実・複特異点会議,  
2011年11月22日,  
兵庫教育大学 神戸サテライト

- ⑨ Shuzo Izumi,  
「Linear Projector on a Vector Space of Holomorphic Functions」,  
Faculty Colloquium,  
2011年11月8日,  
パーデュ大学 (米国)

- ⑩ Shuzo Izumi,  
「Taylor projectors defined on the spacer of holomorphic functions on manifolds」,  
Special seminar ,  
2011年11月1日,  
トロント大学(カナダ)

- ⑪ 泉 脩藏,  
「 $C_m$  の部分多様体上のテイラー補間」  
可微分写像の特異点論とそれに関連する幾何学,  
2009 年12 月9日,  
日本大学文理学部

- ⑫ Shuzo Izumi,  
「Higher order tangent spaces of an embedded complex manifold and Taylor projectors」,  
第六回日仏特異点シンポジウム・幾何学とトポロジーにおける特異点,  
2009年9月9日,  
九州大学西新プラザ

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

泉 脩藏 (IZUMI SHUZO)

近畿大学・理工学部・研究員

研究者番号：80025410