

令和 元 年 6 月 4 日現在

機関番号：34419

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17564

研究課題名（和文）位相的ラドン変換の超局所解析と特異点理論への応用

研究課題名（英文）Microlocal analysis of topological Radon transforms and their applications to singularity theory

研究代表者

松井 優 (MATSUI, Yutaka)

近畿大学・理工学部・准教授

研究者番号：10510026

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究では，集合のオイラー数をその有限加法的測度とする構成可能関数や定義可能関数といった代数的な背景をもつ関数の積分変換について，反転公式，像の特徴づけ，応用を中心に研究している．本研究課題の研究成果は3つに大別できる：コンパクトグラスマン多様体の間の構成可能関数の位相的ラドン変換の単射性定理の証明，アフィングラスマン多様体の間の大域的構成可能関数の位相的ラドン変換の諸性質の部分的解明，定義可能関数の位相的ラドン変換の諸性質の部分的な解明，である．

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では位相的ラドン変換と呼ばれる積分変換の反転公式や像の特徴づけを中心としたさまざまな性質を研究している．それは切断面のオイラー数から元の集合を復元するという幾何学的CTスキャンの原理におけるその切断面の様子や元の集合の復元可能性についての研究であるといえる．今回の研究成果は，先行研究とは数学的に異なるさまざまな設定の下で，位相的ラドン変換の反転公式や像の特徴づけについて考察を行い，類似の結果が得られることを明らかにしたものである．

研究成果の概要（英文）：In this research, we study integral transforms of constructible functions and definable functions, whose integral theory is based on the topological Euler characteristics. We obtained the following results: the injectivity theorem of topological Radon transforms of constructible functions on compact Grassmann manifolds, several properties of topological Radon transforms of globally constructible functions on affine Grassmann manifolds and several properties of topological Radon transforms of definable functions.

研究分野：数学(代数解析学)

キーワード：ラドン変換 構成可能関数 定義可能関数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

位相的ラドン変換は、集合のオイラー数をその有限加法的測度とする積分論における、代数的な背景をもつ構成可能関数の幾何学的な積分変換である。研究代表者は、これまでこの位相的ラドン変換について、超局所解析的手法や組み合わせ論的手法を用いて研究を行ってきた。特に、Schapira による先行研究の設定を一般化し、グラスマン多様体間の標準的な核をもつ構成可能関数のラドン変換について、その左逆変換を具体的に構成し、反転公式を証明した。このような幾何学的なラドン変換の反転公式の存在は、ユークリッド空間内のコンパクトな集合を、次元が指定されたアフィン線形部分空間によるその集合の切断面のオイラー数の情報のみから、完全に復元できるという応用がある。これは CT スキャンなどに応用されている解析的ラドン変換と類似の結果である。さらに、研究代表者は、反転公式を得る十分条件の下で位相的ラドン変換像がある種の位相的積分方程式系を満たし、左逆変換が右逆変換となることを証明した。これは解析的ラドン変換の像がある種の偏微分方程式系を満たすことの類似の結果である。また、研究代表者は、双対多様体の幾何学的な次数公式の研究などの位相的ラドン変換の特異点理論への応用についても、共同研究により結果を得ている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、これまでコンパクトグラスマン多様体を中心に行われてきた位相的ラドン変換の研究を、その設定をコンパクトグラスマン多様体から旗多様体や一般の等質空間を目指してさまざまな空間へと拡張して行うことである。具体的には、新しい設定で新たな位相的ラドン変換を定義し、その反転公式、像の特徴づけ、特異点理論への応用に関する研究を行うものである。さらに、扱う関数を構成可能関数から定義可能関数へと一般化して、位相的ラドン変換の振る舞いをも研究する。空間や関数のさまざまな設定を考察することにより、このような幾何学的な積分変換の統一的な理解を目指す。また、本研究で研究するさまざまな幾何学的積分変換から得られる積分幾何について考察することも目的である。本研究は、研究代表者のこれまでの先行研究の継続課題の研究に位置するものである。

3. 研究の方法

本研究では、まず計算機による数式処理を利用しながら具体例の構成を行うなどの準備的研究を行い、新しい現象の発見や新しい数学的構造の発見を試みる。次に、専門家と研究連絡を行いながら、その準備的な研究の理論的な定式化に取り組む。最後に、期待される命題の証明に取り組む、全体としての理論構築を行う。

4. 研究成果

本研究では、集合のオイラー数をその有限加法的測度とする積分論における構成可能関数や定義可能関数といった代数的な背景をもつ関数の積分変換について研究を行っている。本研究課題の研究期間において得られた研究成果を大別すると

- ・コンパクトグラスマン多様体の間の構成可能関数の位相的ラドン変換の単射性定理の証明
 - ・アフィングラスマン多様体の間の大域的構成可能関数の位相的ラドン変換の諸性質の部分的解明
 - ・定義可能関数の位相的ラドン変換の諸性質の部分的解明
- である。

まず、コンパクトグラスマン多様体の間の構成可能関数の位相的ラドン変換の単射性定理について説明する。研究代表者の先行研究により、コンパクトグラスマン多様体の間の構成可能関数の標準的な核関数をもつ位相的ラドン変換は、次元に関する条件の下で左逆変換が具体的に構成でき、反転公式が証明されていた。また、同じ条件下で位相的ラドン変換像がある種の位相的積分方程式系を満たし、さらにはその位相的積分方程式系を満たす構成可能関数が位相的ラドン変換像として表されるという像の特徴づけも得られていた。一方で、その次元に関する十分条件を満たさない場合に、反転公式や位相的ラドン変換像の特徴づけについて、これまで部分的な考察や結果はあったものの一般的な結果は得られていなかった。今回、先行研究で得られていた次元に関する十分条件を満たさない場合、位相的ラドン変換は単射ではないことを証明した。すなわち、これらの場合には左逆変換は存在せず、反転公式も証明できないことが明らかとなり、コンパクトグラスマン多様体の間の構成可能関数の位相的ラドン変換の単射性を完全に決定できた。証明には位相的ラドン変換像の特徴づけの研究の過程において得られていた位相的ラドン変換像を満たす位相的積分方程式系の性質に関する考察が役立った。

次に、アフィングラスマン多様体の間の大域的構成可能関数の位相的ラドン変換の研究について説明する。先行研究では主にコンパクトグラスマン多様体の間の構成可能関数に対して位相的ラドン変換を研究していた。本研究では、アフィングラスマン多様体の間の構成可能関数に対して位相的ラドン変換を定義し、コンパクトグラスマン多様体の間の場合と同様の問題である、左逆変換の具体的な構成、単射性定理、位相的ラドン変換像の特徴づけに関する研究を行い、部分的に結果を得た。アフィングラスマン多様体上の構成可能関数は、これまでの局所的な性質ではなく無限遠における挙動をコントロールするよう大域的な構成可能性をもつものを対象とした。標準的な核関数をもつ位相的ラドン変換は、コンパクトグラスマン多様体の場合と平行な議論で、類似の次元に関する十分条件の下で左逆変換を具体的に構成でき、反転公式

が得られることを証明した．位相的ラドン変換が単射となる条件は，コンパクトグラスマン多様体の場合と異なり，本研究の手法で得た反転公式の十分条件を満たさない場合でも単射となる場合が存在することがわかった．単射となる次元に関する条件をすべて決定できたわけではなく，現在の手法では判定できない場合も残っている．また，本研究の手法で反転公式自体は証明できていないが位相的ラドン変換が単射である場合について，左逆変換が具体的にどのように構成できるのかについてもまだ解明できていない．これらの点については，引き続き研究を行う必要がある．位相的ラドン変換像の特徴づけに関する研究については，本研究の手法で反転公式を得る次元に関する十分条件の下で，位相的ラドン変換像がある種の位相的積分方程式系を満たすことを証明した．結果自体はコンパクトグラスマン多様体の場合と同様である．その位相的積分方程式系を満たす構成可能関数が位相的ラドン変換で表されるかどうか，すなわち右逆変換の具体的な構成については，コンパクトグラスマン多様体の場合とは異なり，一般には左逆変換が右逆変換になっていないようである．現在の手法では右逆変換は特別な次元の場合にのみ構成できている．一般の右逆変換の構成については，現在も未解決であり，今後も引き続き研究を行う必要がある．

最後に，定義可能関数の位相的ラドン変換の研究について説明する．研究代表者による先行研究によって，核関数が三角形分割に関する強い幾何的仮定を満たす場合に定義可能関数の位相的ラドン変換の反転公式が証明されていた．まず，その仮定を弱め適用範囲を広げる研究を行った．定義可能関数の位相的積分理論は，定義可能関数の構成可能関数による近似を用いて定義されるが，積分が線形性を満たさないなどの計算を行う上でさまざまな大きな障害をもつ．そのため反転公式の証明には積分核や被積分関数に幾何的な仮定が必要であると思われる．本研究では，先行研究とは異なる幾何学的な仮定の下でも反転公式が得られることを証明した．先行研究における仮定も本研究における仮定も技術的なものであり，結果を得るためにいくつかの仮定の課し方があったことがわかった．これらを含める本質的な幾何的仮定があると思われるが，一般的な設定の下でその本質的な仮定を見出すには至っていない．次に，反転公式を得るための技術的な仮定よりもさらに強い幾何的仮定の下では，位相的ラドン変換像がある種の位相的積分方程式を満たすことを証明した．これは構成可能関数の位相的ラドン変換の像の特徴づけと類似の結果と考えられる．いずれの場合においても，仮定は構成可能関数の位相的ラドン変換の結果は含んでおり非自明ではないものの，結果を積分幾何などの諸問題に応用するには十分な仮定とは言えず，定義可能関数に対する位相的積分理論の整備や積分変換の考察に適した弱く本質的な幾何的仮定について今後さらなる研究が必要であると思われる．これらについては今後も引き続き研究を行う必要がある．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計4件)

Y. Ike, Y. Matsui and K. Takeuchi, Hyperbolic localization and Lefschetz fixed point formulas for higher-dimensional fixed point sets, IMRN 2018(2018), 15, pp.4852-4898, 2018. (査読有)

K. Takeuchi, Y. Matsui, Monodromy at infinity of polynomial maps and A-hypergeometric functions, Sugaku, 29, pp.67-99, 2016. (査読有)

Y. Matsui and K. Takeuchi, On the sizes of the Jordan blocks of monodromies at infinity, Hokkaido Math. J., 44, pp.313-326, 2015. (査読有)

Y. Matsui, A range characterization of topological Radon transforms on Grassmann manifolds, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 60, pp.423-440, 2015. (査読有)

〔学会発表〕(計6件)

Y. Matsui, Topological Radon transforms on various Grassmann manifolds, RIMS 共同研究 代数解析の諸問題-超局所解析と漸近解析, 京都大学数理解析研究所, 2018年10月19日

Y. Matsui, Topological tomography, 研究コア交流会, 近畿大学, 2018年6月28日

Y. Matsui, Topological Radon transforms on Grassmann manifolds, Australian-Japanese workshop on real and complex singularities (JARCSVII), The University of Sydney, Australia, 2017年9月25日

Y. Matsui, Euler obstruction の応用について, 若者のための現代幾何入門, 立教大学,

2016 年 12 月 10 日

Y. Matsui, Topological Radon transforms and their applications, RIMS 研究集会 New development of microlocal analysis and singular perturbation theory, 超局所解析と特異摂動の新展開, 京都大学数理解析研究所, 2016 年 10 月 4 日

Y. Matsui, Euler obstructions and related topics I, II, 特異点の大域的研究(Research on global properties of singularities), 兵庫教育大学, 2016 年 6 月 23 日

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。