

# フォースコントロールにおいて不安定領域を有する車両の動的挙動についての基礎的研究

酒井 英樹<sup>\*1</sup>

## A fundamental study of dynamic behavior of vehicles with unstable region under force control

Hideki SAKAI<sup>\*1</sup>

<sup>\*1</sup> Kinki Univ. Dept. of Robotics Engineering  
1 Umenobe, Takaya, Higashihiroshima-shi, Hiroshima 739-2116 Japan

Received 16 August 2013

### Abstract

The primary method of improving steering dynamic response performance is expected to involve position control. However the driver uses not only the position of the steering wheel but also torque for control. It has been pointed out that particularly in regions that are close to straight-line driving, torque is the primary means of steering control. Therefore in order to achieve better high-quality dynamic response, it will be necessary to set higher natural frequencies and damping ratios for force control. A universal method for achieving this can be achieved by examining the symbolic expressions for these factors. Force control natural frequencies and damping ratios have been formularized for stable vehicles at all driving speeds. However these formulas cannot be used for vehicles which have unstable regions, and in fact there are vehicles which have such unstable regions. This paper examines a method of setting higher natural frequencies and damping ratios in order to improve the quality of dynamic response characteristics for vehicles that have unstable regions. I first envision a vehicle with neutral steering and steering system damping of 0, and confirm that the characteristic formula is a fourth-order equation for the Laplacian operator  $s$ . Next I show that when  $s$  is converted to a certain variable, the characteristic formula is written as a biquadratic equation for that variable. By solving this biquadratic equation, the damped natural frequencies and damping ratios are formularized. By considering these formulas, I show that increasing the cornering coefficient is a method that can simultaneously increase the damped natural frequency and damping ratio. I also show that this method can be applied to under-steer vehicles and vehicles which have steering system damping, and finally demonstrate the utility of this method with a time history response in transitional steering.

**Key words** : Automobile, Vehicle dynamics, Handling and stability, Maneuverability, Force control, Free control, Natural frequency, Damping ratio, Steering system.

## 1. 緒 言

ドライバは、トルクと角度の2つの情報を用いてステアリングホイールを操舵するため、トルクも角度も車両に対するドライバからの入力でもあり、車両からドライバへの出力でもある(岩元他, 1978). そこで操舵方式として、トルクだけで操舵をするとみなした『フォースコントロール』(force control)と、角度だけで操舵するとみなした『ポジションコントロール』(position control)が定義されている(自動車技術ハンドブック編集委員会編, 2004). この2種類のうち、両者の配分比率についての報告例は見当たらないが、従来の車両運動の理論や研究のほとんどはポジションコントロールを対象としていると思われる. 例えば文献(安部, 2012)の第3章『車両運動の基礎』では、『車両運動』をポジションコントロールに限定しており、フォースコントロールは5.3.2項において言及されているだけである.

一方、肘の屈曲角が  $\pi/2$  のときの腕の位置決め誤差の標準偏差は約 0.07[rad]であると報告されている(赤松他,

---

\*本論文は日本機械学会論文集 81 巻 823 号(2015),No.14-00384 の再録である

<sup>\*1</sup> 近畿大学工学部 (〒739-2116 広島県東広島市高屋うめの辺 1)

E-mail of corresponding author: sakai\_vd@yahoo.co.jp

1986). この誤差を、肘の長さを 0.3[m], ステアリングホイールの半径を 0.19[m] として舵角に換算すると 0.11[rad] になる. この量は、操舵応答の評価において有意であると思われる. 例えば、直進からの過渡操舵における、いわゆる操舵初期応答はこの範囲内に入ることがあるからである. 従ってフォースコントロール主体の場合には勿論のこと、ポジションコントロールが主体の場合でも、この誤差以下の精度で操舵するためには、フォースコントロールを併用する必要がある. したがってドライバの操舵においてフォースコントロールが占める比率は有意であると思われる. この蓋然性は近年、フォースコントロール下の車両応答が検討(村岸他, 2010)されたり、フォースコントロール下の応答性向上のためのアクティブパワーステアリング制御(毛利他, 2006)(久代他, 2009)が開発されたりすることによって、裏付けられると思われる. したがって操舵応答のさらなる性能向上のためには、フォースコントロールにおける車両の動的な応答性能向上も重要であるはずである.

動的な応答性能向上の普遍的な向上法は、フォースコントロールにおける固有振動数を定式化し、その式における各項の組合せや次数などの考察から得られるはずである. 固有振動数等の定式化とは、特性方程式をラプラス演算子  $s$  の 2 次式で表すことである. 特性方程式の次数は、フォースコントロールの場合、最低でも  $s$  の 4 次式なので、特性方程式を 2 組の  $s$  の 2 次式に因数分解する必要がある. この因数分解は一般には困難と思われるが、不安定領域を有しないときの最も単純と思われる車両モデルの特性方程式は、因数分解後の  $s^1$  の係数に『当たり』をつけることで因数分解された(酒井, 2014). しかしこの式は、不安定領域を有する車両には適用できない. 不安定領域とは、ある車速以上の車速域において、フォースコントロール下の車両が発散しようとする性質であり、それ以下の車速域では安定である. 例えば最高速度を超える車速域だけで不安定になる車両の場合、不安定現象は生じない. 実際の乗用車でも、不安定領域を有する車両があると指摘されている(酒井, 2013a). その車両のように省燃費化を狙ってパワーステアリングシステムのパワアシストに要するエネルギーを減らすために、キャストトレール長を小さく設定することにより、キングピン軸まわりの復元モーメントが不足し、その結果、不安定領域を有する車両が出現することが今後も予想される.

そこで本論文は、不安定領域を有する車両の動的挙動の基本的性質を考察する. そのために単純モデルにおける固有振動数と減衰比の定式化をおこなうが、不安定領域を有する車両の場合、因数分解のための『当たり』が見当たらない. そこでまず  $s$  をある変数に変換すると、特性方程式が、その変数についての複二次式になることを指摘する. 次にその複二次式を解くことによって、根を定式化する. 次に根と係数との関係から 2 つの二次方程式を導出することによって、固有振動数と減衰比を定式化する. さらにこの式を吟味することによって、動的挙動の基本的性質を考察する. 最後に安定の余裕の設定法を提案する.

## 2. 単純モデルの特性方程式

### 2・1 車両モデル

本研究に用いるモデルは 2 つから成る.

1 つ目は平面運動を表すための、図 1 に示される線形 2 自由度モデルである. ここで  $m$  は車両質量を、 $l_f$  は重心～前輪間距離を、 $l_r$  は重心～後輪間距離を、 $I_z$  はヨー慣性モーメントを、 $V$  は車速を、 $r$  はヨー角速度を、 $\beta$  は重心位置の車体横滑り角を、 $\beta_f$  は前輪位置の車体横滑り角を、 $\beta_r$  は後輪位置の車体横滑り角を、 $\delta$  は舵角を、 $K_f$  は前輪コーナリングパワを、 $K_r$  は後輪コーナリングパワを、 $F_f$  は前輪横力を、 $F_r$  は後輪横力をそれぞれ表し、さらにホイールベースを  $l (=l_f + l_r)$  と記す. なお本論文では車体のロール運動や外乱入力は無視する.

図 1 に示される車両の運動方程式は次のように記述できる.

$$mV(r + \dot{\beta}) = F_f + F_r \quad (1)$$

$$I_z \dot{r} = l_f F_f - l_r F_r \quad (2)$$

$$F_f = -2K_f(\beta_f - \delta) \quad (3)$$

$$F_r = -2K_r\beta_r \quad (4)$$

$$\beta_f = \beta + \frac{l_f}{V}r \quad (5)$$

$$\beta_r = \beta - \frac{l_r}{V}r \quad (6)$$

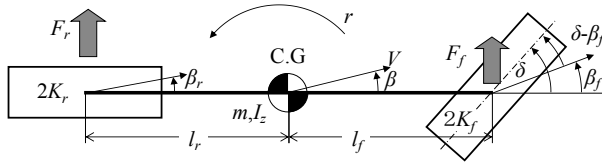


Fig. 1 Vehicle model

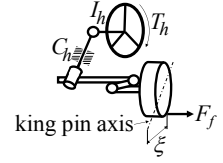


Fig. 2 Model of steering system

2つ目は操舵系の運動を表すための、図2に示される線形1自由度モデルである．ここでキャスタートレールとニューマチックトレールとの和を $\xi$ ，操舵系の慣性モーメントを $I_h$ ，操舵系の減衰係数を $C_h$ ，操舵トルクを $T_h$ とそれぞれ記す．なお操舵系のモデル化にあたり， $I_h$ はステアリングホイールだけに存在するものと仮定し，さらにステアリングホイールの回転軸は水平面内にあるものと仮定する．またオーバーオールギヤ比は1とする．図2に示される操舵系の運動方程式は次のように記述できる．

$$I_h \ddot{\delta} = -\xi F_f - C_h \dot{\delta} + T_h \quad (7)$$

ここで操舵系単独の固有振動数 $\omega_s$ を

$$\omega_s^2 = \frac{2\xi K_f}{I_h} \quad (8)$$

として定義(坂下，岡田，1964)すれば，式(7)は

$$\ddot{\delta} = -\omega_s^2(\delta - \beta_f) - \frac{C_h}{I_h} \dot{\delta} + \frac{T_h}{I_h} \quad (9)$$

と変形できる．

## 2・2 パラメータ表記の簡潔化

運動方程式をより簡潔に表すために，パラメータの表記を変更する．

### 2・2・1 $m$ を消去するためのパラメータ表記

コーナリングパワがポジションコントロール下の車両応答に及ぼす影響は，無次元数であるコーナリング係数によって支配される(景山，2001)．そのためコーナリング係数と式(8)を用いて運動方程式を記述すると，運動方程式から $m$ を消去することが可能になるが，その代わりに重力加速度項が運動方程式に付加されてしまう．そこ

で重力加速度項の付加を避けるために，コーナリング係数に重力加速度を乗じた『加速度次元のコーナリング係数』（以後，単に『コーナリング係数』と記す）を用いる．前輪のコーナリング係数  $C_f$  と，後輪のコーナリング係数  $C_r$  をそれぞれ式(10)，(11)によって定義する(酒井，2013a)．乗用車の場合， $C_f$  は 80～100 程度， $C_r$  は 160～240 [ $\text{m/s}^2$ ] 程度であるとの報告がある(北浜，酒井，1999)．

$$C_f \equiv \frac{2K_f}{\frac{l_r}{l}m} \quad (10)$$

$$C_r \equiv \frac{2K_r}{\frac{l_f}{l}m} \quad (11)$$

### 2・2・2 重心位置とホイールベースを表すためのパラメータ標記

ホイールベースおよび重心位置の 2 つの情報は， $l$  と  $l_f$ ， $l_r$  の 3 つのパラメータによって表されるため，冗長である．そこで前輪荷重配分比を  $p$  と記すと， $l_f$  および  $l_r$  はそれぞれ次式のように記述される．

$$l_f = (1-p)l \quad (12)$$

$$l_r = pl \quad (13)$$

### 2・3 単純モデルとしての仮定

式(1)～(6)及び式(8)～(13)で表される車両モデルについて，固有振動数や減衰比の定式化のために次の 3 つの仮定を設ける．

1 つ目の仮定は，

$$C_f = C_r = C \quad (14)$$

である．このときステア特性はニュートラルステアである．

2 つ目の仮定は，

$$I_z = ml_f l_r \quad (15)$$

である．乗用車では  $I_z/m l_f l_r = 0.85 \sim 1.05$  であるとの報告がある．この仮定はこの分布内にある．

3 つ目の仮定は，

$$C_h = 0 \quad (16)$$

である．以上 3 つの仮定を同時に満たす車両を『単純モデル』と記す．

### 2・4 単純モデルの特性方程式

式(1)～(6)および式(8)～(16)を用い，その全ての変数の初期条件を 0 とした上でラプラス変換を行い， $T_h$  に対する  $r$

の応答を求めると、次式が得られる.

$$\frac{r(s)}{T_h(s)} = \frac{C}{I_h l V} \cdot \frac{sV + C}{s^4 + A_3 s^3 + A_2 s^2 + A_1 s + A_0}$$

where

$$A_3 = 2 \frac{C}{V}$$

$$A_2 = \omega_s^2 + \left( \frac{C}{V} \right)^2$$

$$A_1 = \frac{C}{V} \omega_s^2$$

$$A_0 = \frac{C}{l} \omega_s^2 \quad (17)$$

したがって単純モデルの特性方程式として次式が得られる(坂下, 岡田, 1964).

$$s^4 + A_3 s^3 + A_2 s^2 + A_1 s + A_0 = 0 \quad (18)$$

この特性方程式において,  $\omega_s$  を 0 から増加させたときの根軌跡の例を図 3 に示す. この図に示すように, ある  $\omega_s$  (この場合 15.2[rad/s]) において根軌跡が不連続に変化するため, 式(18)を因数分解して得られる固有振動数や減衰比の文字式も, その  $\omega_s$  を境に異なるものと思われる.

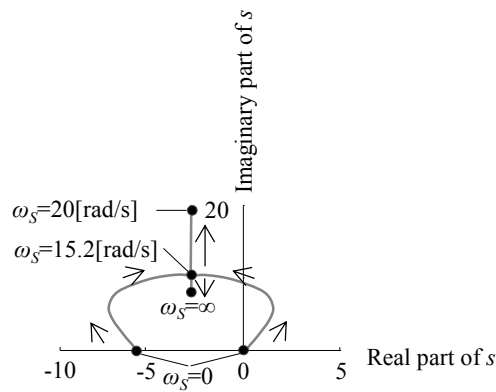


Fig.3 Example of simple model root loci ( $C=C_f=C_r=150[\text{m/s}^2]$ ,  $l=2.6[\text{m}]$ ,  $V=27.8[\text{m/s}]$ ): When  $\omega_s$  is increased from 0, the 2 roots become equal roots at  $\omega_s=15.2$  [rad/s], and here the locus direction of travel changes discontinuously. The simple model is a vehicle which does not contain steering system damping, and has neutral steering and satisfies  $I_{\dot{\epsilon}}=ml_f l_r$ .  $C_f$  is the cornering coefficient for the front wheels, and  $C_r$  is the cornering coefficient for the rear wheels. When both of these are equal, the vehicle has neutral steering.

### 3. 固有振動数および減衰比の定式化

#### 3・1 変数変換

四次方程式の解法であるフェラーリの方法に準じて、特性方程式の3次の項を消去するために、次式の変数変換をおこなう。

$$s' = s + \frac{A_3}{4} \quad (19)$$

ここで  $s'$  は複素数である。上式を式(18)に代入すると次式が得られる。

$$s'^4 + D_2 s'^2 + D_0 = 0 \quad (20)$$

where

$$D_2 = \omega_s^2 - \frac{C^2}{2V^2}$$

$$D_0 = \left( \frac{C}{l} - \frac{C^2}{4V^2} \right) \omega_s^2 + \frac{C^4}{16V^4}$$

上式は、 $s'$  の3次の項が消去されただけでなく、予想外の効果として1次の項も消去されたので、 $s'^2$  についての二次方程式である。そこで上式に二次方程式の解の公式を適用して  $s'^2$  の根を求め、その正負の平方根をとると

$$s' = \pm \sqrt{\frac{D_2}{2} \left( -1 \pm \sqrt{1 - \frac{4D_0}{D_2^2}} \right)} \quad (21)$$

となる。これらの根を次のように識別する。

$$s'_1 = + \sqrt{\frac{D_2}{2} \left( -1 + \sqrt{1 - \frac{4D_0}{D_2^2}} \right)} \quad (22)$$

$$s'_2 = + \sqrt{\frac{D_2}{2} \left( -1 - \sqrt{1 - \frac{4D_0}{D_2^2}} \right)} \quad (23)$$

$$s'_3 = - \sqrt{\frac{D_2}{2} \left( -1 + \sqrt{1 - \frac{4D_0}{D_2^2}} \right)} \quad (24)$$

$$s'_4 = - \sqrt{\frac{D_2}{2} \left( -1 - \sqrt{1 - \frac{4D_0}{D_2^2}} \right)} \quad (25)$$

これら4つの根のうち、共役複素数の関係にある2根ずつについて、解と係数との関係を用いて二次方程式を構成することによって2組の固有振動数および減衰比が定式化できる。ただし共役複素根となる組合せは、内側の根号内の項の符号によって変化する。例えば内側の根号内が非負であれば、 $s'$ は実数か純虚数になる。純虚数のときは、絶対値どうしが等しい $s'_1$ と $s'_3$ とが、 $s'_2$ と $s'_4$ とが（実部0の）共役複素根になる。また内側の根号内が負のときは $s'$ は複素数になり、上記とは異なる根の組み合わせが共役複素根になるものと思われる。この符号変化分けを一般化するための指標としてフォースコントロールにおける安定性指標を用いる。

### 3・2 フォースコントロールの安定性指標

$C_h=0$  のとき、フォースコントロール下の安定条件は、次式で表される。

$$B \geq 2 - \frac{IC_r}{V^2} \quad (26)$$

この安定条件を図4に示す。

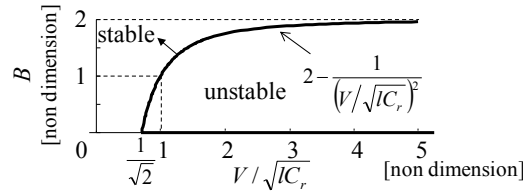


Fig.4 Unstable region with non-dimensional expression:  $B$  is the force control stability index. When  $B < 2$ , then the vehicle has an unstable region.  $l$  is the wheel base and  $V$  is the vehicle speed.

式(26)における  $B$  は、フォースコントロールにおける安定性指標であり、次式によって定義される(酒井, 2013a)。

$$B \equiv \frac{\omega_s^2}{\omega_z^2} \quad (27)$$

さらに  $\omega_z$  は次式で定義される。

$$\omega_z^2 \equiv \frac{2I_f K_f + 2I_r K_r}{I_z} \quad (28)$$

単純モデルの場合、 $\omega_z$  は

$$\omega_z^2 = \frac{2C}{l} \quad (29)$$

となる。よって単純モデルの場合の  $\omega_s$  は

$$\omega_s^2 = \frac{2C}{l} B \quad (30)$$

と表せる。

### 3・3 根の対応

$B$  を用いることで、式(20)における  $D_2$  および  $D_0$  は式(31)によって表される。

$$D_2 = \frac{2C}{l}B - \frac{C^2}{2V^2} \quad (31)$$

$$D_0 = 2\left(\frac{C}{l} - \frac{C^2}{4V^2}\right)\frac{C}{l}B + \frac{C^4}{16V^4}$$

これらの表記を用いると、式(22)～(25)の内側の根号内の項は

$$1 - \frac{4D_0}{D_2^2} = \frac{16B(B-2)}{\left(4B - \frac{Cl}{V^2}\right)^2} \quad (32)$$

となる。

$B \geq 2$  の場合は、式(22)～(25)の内側の根号内は、式(32)から正であるが 1 よりも小さいため、 $s'_1 \sim s'_4$  は全て純虚数になる。図 5(A)にその例を示す。この場合の固有振動数や減衰比は既に、付録 A に示すように、根の実部一定と当たりをつけて因数分解されている（酒井，2014）ため、本論文では扱わない。

したがって本論文の対象は  $B < 2$  の場合だけである。 $B < 2$  の場合、式(22)～(25)の内側の根号内は負になるため、このとき内側の根号は純虚数になる。一方  $D_2$  は実数であるため、外側の根号内は複素数になる。したがって  $B < 2$  のとき、 $s'_1 \sim s'_4$  はすべて複素数になる。それらのうち実部の符号が等しい根どうしが共役複素根になるため、 $s'_1$  と  $s'_2$  とが実部が正の一組の共役複素根として、 $s'_3$  と  $s'_4$  とが実部が負の一組の共役複素根としてそれぞれ対応する。その例を図 5(B)に示した。

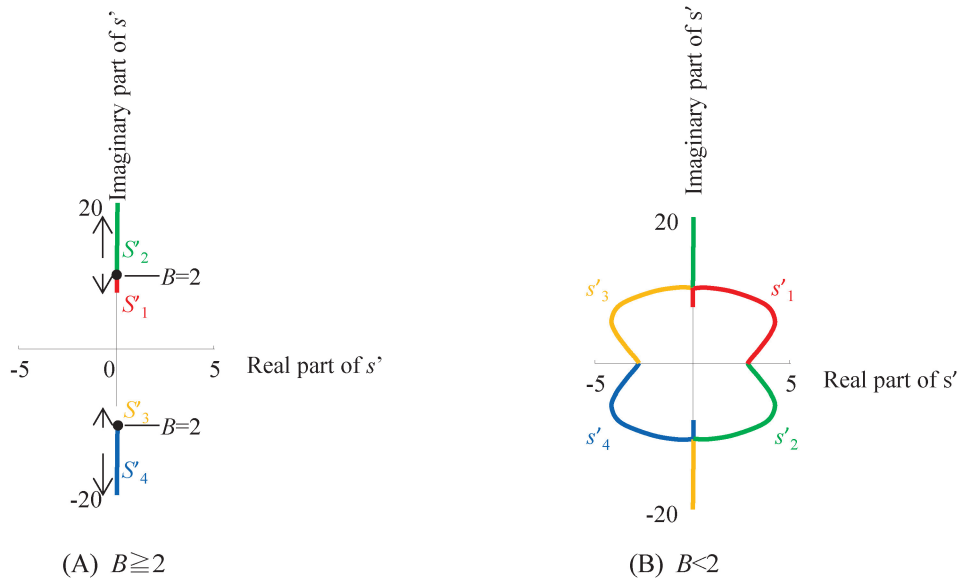


Fig.5 Root loci plots of  $s'_1$  through  $s'_4$ :  $s'$  is a complex number that is defined by Formula (19) ( $C=150[\text{m/s}^2]$ ,  $l=2.6[\text{m}]$ ,  $V=27.8[\text{m/s}]$ ). When  $B < 2$ ,  $s'_1$  and  $s'_3$ , and  $s'_2$  and  $s'_4$ , each compose a conjugate complex root. In contrast, when  $B \geq 2$ ,  $s'_1$  and  $s'_3$ , and  $s'_2$  and  $s'_4$ , each compose a conjugate complex root.

### 3・4 固有振動数と減衰比の定式化

2 組の固有振動数と減衰比のうち、まず  $s'_1$  と  $s'_2$  の組合せから定式化する。 $s'_1$  と  $s'_2$  を根に持つ方程式は

$$(s'-s'_1)(s'-s'_2)=0 \quad (33)$$

だから

$$s'^2-(s'_1+s'_2)s'+s'_1s'_2=0 \quad (34)$$

と書ける．  $s'_1$  と  $s'_2$  の実部が共に正であることに注目すると，上式は

$$s'^2-\sqrt{(s'_1+s'_2)^2s'+s'_1s'_2}=0 \quad (35)$$

と変形できる．さらに上式を

$$s'^2+2\zeta'_{12}\omega'_{n12}s'+\omega'^2_{n12}=0 \quad (36)$$

と記すと

$$\zeta'_{12}\omega'_{n12}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{C}{V}\sqrt{1-2\left(\frac{V\omega_s}{C}\right)^2+\sqrt{1+4\left(\frac{V\omega_s}{C}\right)^2\left(4\frac{V^2}{Cl}-1\right)}} \quad (37)$$

$$\omega'^2_{n12}=\omega_s\sqrt{\frac{C}{l}+\frac{1}{\omega_s^2}\left(\frac{C}{2V}\right)^4-\left(\frac{C}{2V}\right)^2} \quad (38)$$

となる．ここで  $\zeta'_{12}\omega'_{n12}$  は  $s'_1$  および  $s'_2$  の実部であり，  $\omega'_{n12}$  は  $s'_1$  および  $s'_2$  の絶対値である．したがって  $s'_1$  および  $s'_2$  の虚部である減衰固有振動数を  $\omega'_{d12}$  と記すと，三辺法の定理から

$$\omega'_{d12}=\frac{1}{2}\sqrt{\omega_s^2-2\left(\frac{C}{2V}\right)^2+2\sqrt{\frac{C\omega_s^2}{l}+\left(\frac{C}{2V}\right)^2\left[\left(\frac{C}{2V}\right)^2-\omega_s^2\right]}} \quad (39)$$

となる．したがって  $B<2$  のとき

$$s'_1=-\zeta'_{12}\omega'_{n12}+\omega'_{d12}j \quad (40)$$

$$s'_2=-\zeta'_{12}\omega'_{n12}-\omega'_{d12}j \quad (41)$$

となる．ただし  $j$  は虚数単位である．

以上と同様に，  $s'_3$  と  $s'_4$  については，その実部が負であることに留意すると，

$$s'_3=+\zeta'_{12}\omega'_{n12}+\omega'_{d12}j \quad (42)$$

$$s'_4 = +\zeta'_{12} \omega'_{n12} + \omega'_{nd12} j \quad (43)$$

となる.

次に  $s'_1 \sim s'_4$  を, 式 (19) を用いて  $s$  に再変換する. 式 (19) における  $A_3$  は実数だから,  $s$  と  $s'$  の虚部は等しい. よって  $s'_1, s'_2, s'_3, s'_4$  に対応する  $s$  をそれぞれ  $s_1, s_2, s_3, s_4$  と記すと, 式(19)から

$$s_1 = -\frac{C}{2V} - \zeta'_{12} \omega'_{n12} + \omega'_{nd12} j \quad (44)$$

$$s_2 = -\frac{C}{2V} - \zeta'_{12} \omega'_{n12} - \omega'_{nd12} j \quad (45)$$

$$s_3 = -\frac{C}{2V} + \zeta'_{12} \omega'_{n12} + \omega'_{nd12} j \quad (46)$$

$$s_4 = -\frac{C}{2V} + \zeta'_{12} \omega'_{n12} - \omega'_{nd12} j \quad (47)$$

となる. したがって  $s_1 \sim s_4$  の減衰固有振動数は一致する. ここで減衰固有振動数を  $\omega_d$ ,  $s_1$  や  $s_2$  の減衰比を  $\zeta_a$ , その無減衰固有振動数を  $\omega_{na}$ ,  $s_3$  や  $s_4$  の減衰比を  $\zeta_b$ , その無減衰固有振動数を  $\omega_{nb}$  とそれぞれ記すと

$$\omega_d = \frac{1}{2} \sqrt{\omega_s^2 - 2 \left( \frac{C}{2V} \right)^2 + 2 \sqrt{\frac{C \omega_s^2}{l} + \left( \frac{C}{2V} \right)^2 \left[ \left( \frac{C}{2V} \right)^2 - \omega_s^2 \right]}} \quad (48)$$

$$\zeta_a \omega_{na} = \frac{C}{2V} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 2 \left( \frac{V \omega_s}{C} \right)^2} + \sqrt{1 + 4 \left( \frac{V \omega_s}{C} \right)^2 \left( 4 \frac{V^2}{Cl} - 1 \right)} \right] \quad (49)$$

$$\zeta_b \omega_{nb} = \frac{C}{2V} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 2 \left( \frac{V \omega_s}{C} \right)^2} + \sqrt{1 + 4 \left( \frac{V \omega_s}{C} \right)^2 \left( 4 \frac{V^2}{Cl} - 1 \right)} \right] \quad (50)$$

となる. これらの式を用いると,  $\omega_{na}$  と  $\omega_{nb}$  はそれぞれ

$$\omega_{na} = \sqrt{\zeta_a^2 \omega_{na}^2 + \omega_d^2} \quad (51)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{C}{V} \right)^2 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 2 \left( \frac{V \omega_s}{C} \right)^2} + \sqrt{1 + 4 \left( \frac{V \omega_s}{C} \right)^2 \left( 4 \frac{V^2}{Cl} - 1 \right)} \right]^2 + \left\{ \omega_s^2 - 2 \left( \frac{C}{2V} \right)^2 + 2 \sqrt{\frac{C \omega_s^2}{l} + \left( \frac{C}{2V} \right)^2 \left[ \left( \frac{C}{2V} \right)^2 - \omega_s^2} \right]} \right\}}$$

$$\omega_{nb} = \sqrt{\zeta_b^2 \omega_{nb}^2 + \omega_d^2} \quad (52)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{C}{V}\right)^2 \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 2\left(\frac{V\omega_s}{C}\right)^2 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{V\omega_s}{C}\right)^2 \left(4\frac{V^2}{Cl} - 1\right)}} \right]^2 + \left\{ \omega_s^2 - 2\left(\frac{C}{2V}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{C\omega_s^2}{l} + \left(\frac{C}{2V}\right)^2 \left[\left(\frac{C}{2V}\right)^2 - \omega_s^2\right]} \right\}}$$

となる.

## 4. 考察

### 4・1 2組の根の性質

フォースコントロールにおける基本的性質の一つとして、 $B > 2$  のときよりも  $B < 2$  のときのほうが、2組の根の減衰固有振動数の差が小さいとの性質が予測されている. その根拠は、単純モデルにおいて、 $B > 2$  のとき2組の根の虚部の絶対値が異なるとの事実と、 $B < 2$  のとき2組の根の虚部の絶対値は等しいとの仮定に基づく(酒井, 2013b). この仮定が式(48)によって証明された. したがって本結果は、上記基本的性質の蓋然性をさらに補強するものと思われる.

また今回、 $B < 2$  ときの単純モデルの特性方程式が定式化され、それが付録に示される  $B \geq 2$  の式とは異なることが陽に示された. したがってフォースコントロール下の運動の基本的性質の一つは、 $B=2$  を境に固有モードが異なることであると思われる.

### 4・2 減衰固有振動数

前述のように単純モデルでは  $B < 2$  のとき、2組の根の減衰固有振動数が等しい. そこで本論文では、固有振動数の指標として減衰固有振動数を用いる.

$\omega_s$  の代わりに  $B$  を用いると、式(30)から  $\omega_d$  は

$$\omega_d = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2CB}{l} - 2\left(\frac{C}{2V}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{2C^2B}{l^2} + \left(\frac{C}{2V}\right)^2 \left[\left(\frac{C}{2V}\right)^2 - \frac{2CB}{l}\right]}} \quad (53)$$

となる. この式の基本的性質を見出すために、この式を近似する.

その前提条件を考える.  $B$  が 2 よりもはるかに小さいと、応答性よりも安定性が重要になるとと思われるため、 $B$  が 2 に近い場合を検討対象とする. 酒井の報告(2013a)における実車の  $B$  の最小値は約 1.5 であるから、 $B=1.5 \sim 2$  とする. また実車の分布(北浜, 酒井, 1999)から乗用車では  $C=150[\text{m/s}^2]$  程度と思われる. さらに応答性の対象となる車速は最低でも  $V=15[\text{m/s}]$  と思われる.

これらの条件で、式(53)における微小項を無視すると

$$\omega_d \approx \sqrt{\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B}{2}}} \sqrt{\frac{C}{l}} \quad (54)$$

となる. したがって  $\omega_d$  は車速に大きくは依存しない. その計算例を図 6 に示す.  $V$  の増加によって  $\omega_d$  は、式(54)右辺に漸近する.

なお式(54)の一部を  $\omega_s$  を用いて表すと、

$$\omega_d \approx \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{B}{2}}}}{2} \omega_s \quad (55)$$

となる。したがって  $B \doteq 2$  のとき  $\omega_d \doteq (1/2^{1/2})\omega_S$  である。

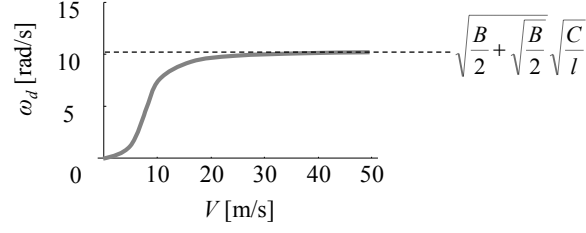


Fig.6  $\omega_d$  dependence on vehicle speed ( $B=1.8[-]$ ,  $l=2.6[\text{m}]$ ,  $C=150[\text{m/s}^2]$ ): In vehicle speed ranges where response is important, there is little dependence of the damped natural frequency  $\omega_d$  on  $V$ .

#### 4・3 減衰

本論文では、 $\zeta_b \omega_{nb}$  よりも実部がより大きい  $\zeta_a \omega_{na}$  を代表根として用いる。  $\omega_S$  の代わりに  $B$  を用いると、  $\zeta_a \omega_{na}$  は

$$\zeta_a \omega_{na} = \frac{C}{2V} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 4 \frac{V^2}{Cl} B} + \sqrt{1 + 8B \frac{V^2}{Cl} \left( 4 \frac{V^2}{Cl} - 1 \right)} \right] \quad (56)$$

と表現できる。ここで式(56)の基本的性質を見出すため、式(56)を安定限界車速まわりでテーラー展開する。まず安定限界車速において  $\zeta_a \omega_{na} = 0$  となる  $V$  は、式(26)から

$$V = \sqrt{\frac{Cl}{2-B}} \quad (57)$$

である。この  $V$  まわりで式(56)を2次のテーラー展開をおこない、さらに微小項を無視すると、式(56)は

$$\zeta_a \omega_{na} \approx \frac{2-B}{2l} \left( \sqrt{\frac{Cl}{2-B}} - V \right) + \frac{2-B}{l} \frac{\left( \sqrt{\frac{Cl}{2-B}} - V \right)^2}{\sqrt{\frac{Cl}{2-B}}} \quad (58)$$

と近似される。したがって式(57)によって表される  $V$  のまわりでは、  $\zeta_a \omega_{na}$  は概ね  $C$  および  $(2-B)/l$  に支配される。式(58)と  $\zeta_a \omega_{na}$  の厳密解との比較を図7に示す。

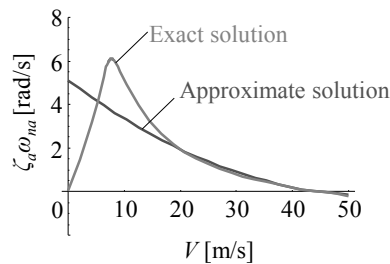


Fig.7 Comparison of  $\zeta_a \omega_{na}$  exact solution and approximate solution ( $B=1.8[-]$ ,  $l=2.6[\text{m}]$ ,  $C=150[\text{m/s}^2]$ ):  $\zeta_a \omega_{na}$  is the product of the dominant root damping ratio and the natural frequency. In the regions where response applies ( $V>15 [\text{m/s}]$ ), it is believed that the approximate solution shown in Formula (58) can be used.

## 5. 安定性の設定法

本章では安定の余裕の設定法を提案する。まず安定の余裕を表す指標について述べ、次にその文字式を吟味することによって各パラメータがその指標に及ぼす影響を調べ、最後に安定の余裕を支配する項を用いた図示法を提案する。

### 5・1 安定の余裕を表す指標

$\zeta_a \omega_{na}$  は 3 つ情報を含意する。1 つ目は安定・不安定である。 $\zeta_a \omega_{na}$  が正であれば安定、負であれば不安定である。2 つ目の意味は、 $\zeta_a \omega_{na}$  が正のとき、 $\zeta_a \omega_{na}$  が安定の余裕を表すことである。なぜなら  $\zeta_a \omega_{na}$  が大きいほど、設計パラメータが変動しても不安定になりにくいからである。3 つ目の意味は応答の速さである。本論文では安定余裕の観点から  $\zeta_a \omega_{na}$  を安定の余裕を表す性能指標として扱い、 $\zeta_a \omega_{na}$  の設定法を提案する。

### 5・2 各パラメータが $\zeta_a \omega_{na}$ に及ぼす影響

各パラメータが  $\zeta_a \omega_{na}$  に及ぼす影響を知るために、まず式(27)に式(8), (10), (29)を代入すると

$$\begin{aligned}
 B &\equiv \frac{\left( \frac{2\xi K_f}{I_h} \right)}{\left( \frac{2C}{l} \right)} \\
 &= \frac{\left( \frac{\xi C \frac{l_r}{l} m}{I_h} \right)}{\left( \frac{2C}{l} \right)} \\
 &= \frac{\xi \frac{l_r}{l} lm}{2I_h}
 \end{aligned} \tag{59}$$

となる。この式を式(58)の  $B$  に代入すると

$$\zeta_a \omega_{na} \approx \frac{1}{2l} \left( 2 - \frac{\xi \frac{l_r}{l} lm}{2I_h} \right) \left[ \frac{\sqrt{Cl}}{\sqrt{2 - \frac{\xi \frac{l_r}{l} lm}{2I_h}}} - V \right] \tag{60}$$

となる。なお式(58)の右辺第 2 項は無視した。式(60)から、 $\zeta_a \omega_{na}$  を構成する項は、 $2 - \xi(l_r/l)lm/(2I_h)$ ,  $Cl$ ,  $l$ ,  $V$  の 4 種類とひとまず考える。なお  $(l_r/l)$  は前輪荷重配分である。

#### 5・2・1 $2 - \xi(l_r/l)lm/(2I_h)$

式(60)には2つの $2-\xi(l_r/l)lm/(2I_h)$ の項がある。式(60)の第1( )内の $2-\xi(l_r/l)lm/(2I_h)$ が大きいほど $\zeta_a\omega_{na}$ も大きい、第2( )内の $2-\xi(l_r/l)lm/(2I_h)$ が小さいほど $\zeta_a\omega_{na}$ が大きくなるので、式(60)のままでは $2-\xi(l_r/l)lm/(2I_h)$ が $\zeta_a\omega_{na}$ に及ぼす影響は分らない。そこで式(56)を $B (= \xi(l_r/l)lm/(2I_h))$  で微分した式の値が0になるときの $B$ を求めると、その $B$ は唯一

$$B = \frac{\xi \frac{l_r}{l} lm}{2I_h} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{Cl}{2V^2}}{1 - \frac{Cl}{4V^2}} \quad (61)$$

である。従って式(56)において $B$ を変化させた図は変曲点を持たず、上に凸か下に凸である。一方、安定限界のとき $\zeta_a\omega_{na}=0, B=2$ のとき安定( $\zeta_a\omega_{na}>0$ )だから、式(56)は下に凸である。したがって安定領域では $B (= \xi(l_r/l)lm/(2I_h))$ が大きいほど $\zeta_a\omega_{na}$ も大きくなる。図8に $\xi(l_r/l)lm/(2I_h)$ と $\zeta_a\omega_{na}$ との関係の例を示す。このように $2-\xi(l_r/l)lm/(2I_h)$ を0に近づけることによって $\zeta_a\omega_{na}$ を増加できる。

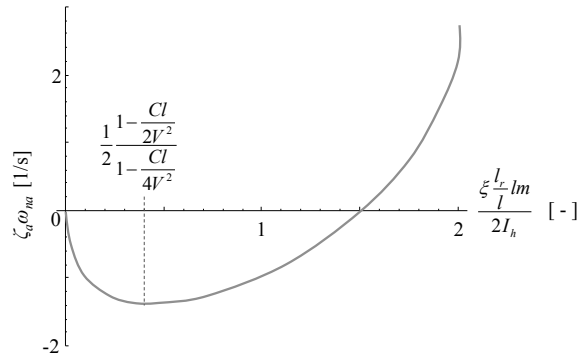


Fig.8 Influence of  $\xi(l_r/l)lm/(2I_h)$  on  $\zeta_a\omega_{na}$  ( $C=150[\text{m/s}^2]$ ,  $l=2.6[\text{m}]$ ,  $V=27.8[\text{m/s}]$ ).

### 5・2・2 $l$ の影響

式(60)を変形すると

$$\zeta_a\omega_{na} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{2 - \frac{\xi \frac{l_r}{l} lm}{2I_h}}{\frac{l}{l}} \right) \left[ \frac{\sqrt{C}}{\left( \frac{\xi \frac{l_r}{l} lm}{2 - \frac{\xi \frac{l_r}{l} lm}{2I_h}} \right)} - V \right] \quad (62)$$

となる。したがって $2-\xi(l_r/l)lm/(2I_h)$ が $\zeta_a\omega_{na}$ に及ぼす影響は、 $1/l$ が $\zeta_a\omega_{na}$ に及ぼす影響と同じである。一方、前項で述べたように $2-\xi(l_r/l)lm/(2I_h)$ が0に近いほど $\zeta_a\omega_{na}$ が増加するから、 $1/l$ が0に近いほど $\zeta_a\omega_{na}$ が増加する。したがって $l$ が大きいほど $\zeta_a\omega_{na}$ が増加する。

### 5・2・3 $C$ の影響

式(62)から $C$ が大きいほど $\zeta_a\omega_{na}$ が増加する。

#### 5・2・4 $V$ の影響

式(60)から  $V$  が小さいほど  $\zeta_a \omega_{na}$  が増加する。

### 5・2 設計パラメータの設定法

本節では  $\zeta_a \omega_{na}$  の簡潔な設定法を提案する。

式(62)に示したように、 $\zeta_a \omega_{na}$  を構成するパラメータは車速  $V$  の他は  $[2-\xi(l_r/l)lm/(2I_h)]/l$  と  $C$  だけである。そこで横軸に  $[2-\xi(l_r/l)lm/(2I_h)]/l$  を、縦軸に  $C$  をそれぞれ用いた平面上で、 $\zeta_a \omega_{na}$  一定の線を描いた図を図9に示す。この図には式(62)の項全てが含まれているので、この平面上で  $\zeta_a \omega_{na}$  を設定できる。この平面が本論文の提案する  $\zeta_a \omega_{na}$  の設定法である。

この平面の使用例について述べる。まずこの平面上で最も注目する線を決める。次に、もし  $C$  が減少する場合、その線上の  $C$  に対応する横軸の値によって、 $[2-\xi(l_r/l)lm/(2I_h)]/l$  が決まり、その値を満たすように  $[2-\xi(l_r/l)lm/(2I_h)]/l$  の構成パラメータを変化させる。もし  $C$  以外が変化する場合、まず  $[2-\xi(l_r/l)lm/(2I_h)]/l$  が増加しないようにパラメータ設定の努力をし、それでも  $[2-\xi(l_r/l)lm/(2I_h)]/l$  が増加する場合は、注目する線上の縦軸の値によって、 $C$  の目標値を決定する。このようにこの平面を用いることによって、設計パラメータ相互間の背反関係や  $\zeta_a \omega_{na}$  を満たすための設計パラメータの適合要件を目で見ながら、設計パラメータを設定できる。

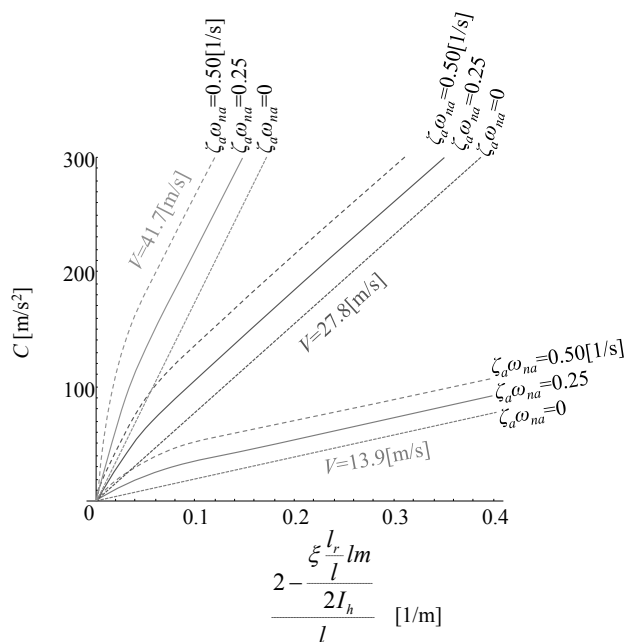


Fig. 9 Influence of every parameters on  $\zeta_a \omega_{na}$ . We can determine design parameters on this plot because this plot contains all terms of  $\zeta_a \omega_{na}$ .

## 6. 結 言

本論文は、フォースコントロールにおいて不安定領域を有する車両の動的挙動についての基礎研究をおこなった。

1) ニュートラルステアかつ操舵系減衰 0 かつ  $I_z = ml l_r$  の場合の車両モデルにおいて、固有振動数と減衰を定式化し、それらの式は、安定領域を有する場合の式と異なることを陽に示した。

2) その固有振動数と減衰の式を考察した。その結果、不安定領域を有する場合、2組の減衰固有振動数は一致し、車速にあまり依存しない。さらに減衰固有振動数および減衰に対する各パラメータの寄与を明らかにした。

3) 安定の余裕も表す減衰の式が4つの項から成ることを指摘し、4つの項全てを同時に図示する方法を提案した。この図を用いることで、設計パラメータ間の背反関係や、減衰を成立させる設計パラメータの適合要件が陽に見える。

以上の結果から、フォースコントロールにおいて不安定領域を有する車両の動的挙動の基本的性質の一部が明らかになるとともに、設計パラメータの組み合わせや応答パラメータが陽に分かるようになった。

## 付 録 A

$B \geq 2$  のとき、図 3(A)において 2 根の実部が等しいように見えることから、 $s^1$  の項が  $C/V$  であると当たりをつけて、式(18)が因数分解された式を次式のように仮定する。

$$\left[ s^2 + \frac{C}{V}s + x \right] \cdot \left[ s^2 + \frac{C}{V}s + y \right] = 0 \quad (\text{A1})$$

ここで  $x$  と  $y$  は未知数である。上式を展開した式と式(18)の、それぞれの  $s^1$  と  $s^2$  の係数どうしを比較して、 $x$  と  $y$  を求めることによって次式が得られる(酒井, 2014)。

$$\left[ s^2 + \frac{C}{V}s + \frac{\omega_s^2}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4 \frac{I_h}{pml\xi}} \right) \right] \cdot \left[ s^2 + \frac{C}{V}s + \frac{\omega_s^2}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{I_h}{pml\xi}} \right) \right] = 0 \quad (\text{A2})$$

$B$  を用いて上式を表すと

$$\left[ s^2 + \frac{C}{V}s + \frac{2BC}{l} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{2}{B}} \right) \right] \cdot \left[ s^2 + \frac{C}{V}s + \frac{2BC}{l} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{B}} \right) \right] = 0 \quad (\text{A3})$$

となる。これらの式の  $s^1$  の係数が減衰を、 $s^2$  の係数が固有振動数を表すのは、 $s^1$  と  $s^2$  の係数が同時に実数になる、 $B \geq 2$  の場合だけである。

なおこれらの式は、3・4 節の方法を用いることによっても導出可能であるが、上記方法よりも複雑である。

## 文 献

- 安部正人, 自動車の運動と制御: 車両運動力学の理論形成と応用(2012), pp.50-169.
- 赤松幹之, 平沢茂利, 林喜男, 関節感覚の関節角度・速度による違いについて, 第 7 回バイオメカニズム学術講演会予稿集(1986), pp.61-64.
- 近森順, 松永大演, モーターファン・ロードテストからみた自動車性能の長期的変遷, 自動車技術, Vol.56, No.11(2002), pp.84-88.
- 岩元貞雄, 平松金雄, 井上茂, ステアリング系のバイラテラル・モデル (I), 自動車技術会論文集, No.15(1978), pp.89-86.
- 自動車技術ハンドブック編集委員会編, 自動車技術ハンドブック (第 1 分冊) 基礎・理論編(2004), p.264.
- 景山克三, 景山一郎, 自動車力学(2001), pp.167-168.
- 北浜謙一, 酒井英樹, 正規化したコーナリングパワーを用いた自動車の操舵応答性能の同定法, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.65, No.633(1999), pp.1960-1965.
- 久代育生, 山崎一平, 国弘洋司, 車両運動が操舵トルクに及ぼす影響を補償する電動パワーステアリングの制御, 自動車技術会論文集, Vol.40, No.6(2009), pp.1405-1410.
- 毛利宏, 久保田正博, 堀口奈美, 過渡的な操舵力アシスト特性が車両運動に及ぼす影響, 自動車技術会論文集, Vol. 37, No. 1 (2006), pp. 155-160.
- 村岸裕治, 山田大輔, 小野英一, 久代育生, 佐藤伸介, オンセンタでの操舵トルクに対する車両応答解析, 自動車技術会論文集, Vol.41, No.3(2010), pp.575-580.
- 酒井英樹, フォースコントロールにおける安定性とその指標, 自動車技術会論文集, Vol.44, No.2(2013a), pp.441-448.
- 酒井英樹, フォースコントロール下の操舵系と車体系の運動特性の数値的研究, 自動車技術会論文集, Vol.44, No.3(2013b), pp.843-850.

酒井英樹, フォースコントロール応答性に関する考察—基礎的考察—, 自動車技術会論文集, Vol.45, No.6(2014), pp.1013-1020.  
坂下和夫, 岡田正, 操舵系の特性を考慮した自動車の操縦安定性に関する線形理論, 自動車技術, Vol.18, No.4(1964), pp.268-273.

## References

- Abe, M., Automotive vehicle dynamics: Theory and applications (2012), pp.50-169 (in Japanese).
- Akamatsu, M., Hirasawa, S. and Hayashi, Y., Kansetsu kankaku no kansetsu kakudo・sokudo niyoru chigai nitsuite, Dai 7 kai baimekanizumu gakujyutukouenkai yokoushu(1986), pp.61-64 (in Japanese).
- Chikamori, S. and Matsunaga, H., Long-term transition of automotive technology from viewpoint of 'Motor Fan' road test, Journal of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.54, No.11 (2002), pp.84-88 (in Japanese).
- Iwamoto, S., Hiramatsu, K. and Inoue, S., Bilateral model of steering system(Part 1), Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan, No.15 (1978), pp.89-96 (in Japanese).
- Jidousha gijyutsu handobukku henshuuininkai, Jidousha gijyutsu handobukku (No.1) Kiso riron hen(2004), p.264 (in Japanese).
- Kageyama, K. and Kageyama I., Jidousha rikigaku (2001), pp.167-168 (in Japanese).
- Kitahama, K. and Sakai, H., Identification method of automobile response to steering input using normalized cornering stiffness, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.65, No. 633(1999), pp.1960-1965 (in Japanese).
- Kushiro, I., Yamazaki, I. and Kunihiro, Y., A new electrical power steering control to compensate for steering torque under influence of vehicle dynamics, Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.40, No.6 (2009), pp. 1405-1410 (in Japanese).
- Mouri, H., Kubota, M. and Horiguchi, N., An investigation on the effect of transient assistant torque input on steering effort, Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.37, No.1 (2006), pp.155-160 (in Japanese).
- Muraghishi, Y., Yamada, D., Ono, E., Kushiro I. and Satoh S., Analysis of vehicle dynamics to steering wheel torque on the on-center, Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.41, No.3 (2010), pp. 575-580 (in Japanese).
- Sakai, H., Stability under force control and its index, Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.44, No.2 (2013a), pp.441-448 (in Japanese).
- Sakai, H., A numerical study on dynamic behavior of steering system and vehicle system under force control, Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.44, No.3 (2013b), pp.843-850 (in Japanese).
- Sakai, H., A Study on Vehicle Response under Force Control -A Fundamental Study-, Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.45, No.6 (2014), pp.1013-1020 (in Japanese).
- Sakashita, K. and Okada, T., Effects of dynamical features of steering system on automobile stability and control, predicted by linearized theory, Journal of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.18, No.4 (1964), pp.268-273 (in Japanese).