Backlog と最適生産量の決定

内　上　　誠

［1］はじめに

在庫循環の重要性から在庫投資および在庫ストックを本格的に研究したのはメッツラー（Metzler, L. A.）であった。その後ブラインダー（Blinder, A. S.）によってさらなる研究がなされたが、その間、研究対象は在庫循環の発生メカニズムの研究から在庫保有動機の仮説と現実のデータとが不整合であることから、在庫保有動機仮説の論争へと移行していった。従来の在庫保有動機の1つに Production-Smoothing 仮説がある。企業は（randomness の無い）需要の増減に対して、生産で対応しようとする場合、限界費用逓増の性質より膨大な費用が発生する可能性がある。そこでこの膨大な費用の発生を回避するために生産を平準化し、需要の少ないときには在庫として蓄積し、需要増大が発生したときには蓄積した在庫で対応しようとする。この点に在庫保有動機を求めたのが Production-Smoothing 仮説である。また同じような考え方として、（randomness）な需要変化に対応するために在庫を保有する、いわば生産の Buffer-stock 効果に保有動機を求める仮説もある。いぜれにせよこれらの仮説にしたがうなら、生産変動は需要（販売）変動より小さいはずである。ところが現実のデータが示すところによると生産の変動（分散）より販売の変動（分散）の方が小さい。したがって、在庫保有動機に関する Production-Smoothing 仮説および Buffer-stock 仮説は事実とは相反することになる。しかしそれでもブラインダーは Production-Smoothing 仮説を支持する立場をとっており、その後このデータを説明するための工夫を行っている。これらの仮説とは別に、Stock-out を回避するために在庫を保有するという仮説がある。この Stock-out avoidance 動機に基づき、生産の分散が販売の分散よりも大きいことを証明したのがカーン（Kahn, J. A.; ［3］）である。

カーンは企業が超過需要を Backlog によってカバーしないケースと完全にカバーするケースを考察し、最後に超過需要の1部分をカバーするケースを考え、そのすべてにおいて生産の分散が販売の分散を上回ることを明らかにしている。

ところがカーンモデルでは超過需要の中、どれくらいの割合を Backlog によって対応するかがモデル内からは導きだされておらず、単に外生的に与えられているだけである。そこで本稿の目的は Backlog を行う場合の企業の最適生産量と超過需要に対する Backlog の割合を最適化行動の中から導き出す。基本となるモデルの枠組みはカーンのものであるため、まずカーンモデルをやや詳細に再述する。その後、超過需要と Backlog に注目できるようにカーンモデルを修正する。その後最適生産量と Backlog を行う割合を導き出す。

［2］カーンモデルの Review

Backlog（予約注文）を含む在庫変動を考える場合、基本的な考え方はカーン（Khan）モデルにおいて整理されている。以下において展開されるわれわれのモデルもこのカーンモデルを土台としている。そこでやや蛇足ではあるが、そのモデルの基本的な骨格を再述しておくことは有益であると思われる。

（2－1）カーンモデル（1）・・・Backlog のない場合

需要は AR（1）プロセス、

（1）$D_t = d + \rho D_{t-1} + u_t$

にしたがうものと仮定されている。ここで D は需要を、t は期を表す。u は予測誤差であり $i.i.d.(0, \sigma^2)$ の性質をもち、また独立であると仮定されている。t 期には u_t は予測されないが、前期の u_{t-1} は正確に知り得る。さらに $|\rho| < 1$ である。したがって、t 期に企業によって予測される需要は、

（2）$E[D_t \mid t] = d + \rho D_{t-1}$

である。

一方、n を在庫ストックとすると在庫フローは、

（3）$n_{t+1} - n_t = Y_t - S_t$

で表される。n_{t-1} および n_t は各期の期首の在庫ストック量であり、Y と S はそれぞれ生産と実際の販売量を表す。なおここでは t 期の期末在庫ストックがそのまま $t+1$ 期の期首在庫ストックとなることを仮定している。(1)

企業行動は今期の利潤および将来利潤の割引現在価値が最大になるように生産量を決定するものと仮定され、次式を考える。

（4）$E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty}(1+\theta)^{-i}(pS_{t+i} - cY_{t+i})\right]$

p は価格を、c は限界費用を表すが、どちらも一定と仮定されている。$pS_{t+i} - cY_{t+i}$ が各期の利潤を表し、将来利潤は割引率 θ によって現在価値に評価される。c は一定であるのでここでは Production-Smoothing のことは考察されない。

販売量は非負制約条件が仮定される。つまり

（5）$S_t = Min[n_t + Y_t, D_t]$

t 期の需要に対応できる最大限の供給量は過去からの在庫ストック n_t と今期の生産 Y_t の合計である。ここでは Backlog を考えていないため、この供給量を越える需要が発生した場合には超過需要はすべて失われてしまい、予約注文残高（Backlog）として次期に繰り越されることはない。予約注文はまさに今期対応できなかったいわばマイナスの販売であるが、われわれは予約注文を許していないため販売量に非負制約を課していることになる。

また（4）から最適在庫ストックが一意的に導き出され、毎期同量の在庫ストックが維持される。(2)

それをkで表すことにする。そして毎期この最適在庫ストック量が維持されるように生産計画へと組み込まれる。つまりkは予測できない需要u_tに対処するために保有され、減少部分は次期の生産で補塡される。このように考えるなら毎期の供給は

$$n_t + Y_t = k + Y_t$$

と考え得る。

（2－2）企業の生産計画と実際の販売量

以上より企業のt期生産計画は次のように決定され、実施される。

（6）$Y_t = E[D_t \mid t] + Min[u_{t-1},\ k]$

$\quad = d + \rho D_{t-1} + Min[u_{t-1},\ k]$

企業は予想される需要と最適在庫ストックを維持するように生産を計画・実行する。まず企業は今期予想される需要分（$E[D_t \mid t]$）の生産を計画する。つづいて、前期において予想されなかった需要u_{t-1}に対応すべく（前期の）最適在庫ストックが用いられているため、その分最適在庫ストックが減少している。そこで今期その減少部分を補塡するための生産を行う必要がある。それが$Min[u_{t-1},\ k]$である。もちろん$u_{t-1} < k$であればkの減少部分はu_{t-1}であるためu_{t-1}だけを補塡生産すればよく、$u_{t-1} = k$であればkはすべて販売されているためkだけを生産すれば良い。また$u_{t-1} > k$であればkを上回る需要部分はBacklogされないために消失したとみなし、今期はkだけを生産すれば良い。

一方、実際の販売量は（1）と（5）より、

（7）$S_t = d + \rho D_{t-1} + Min[u_t,\ k]$

であたえられる。（1）より予想通りの需要部分（$d + \rho D_{t-1}$）と予想されなかった需要部分（u_t）のうち最適在庫ストック（k）によって対処した部分（$Min[u_t,\ k]$）の合計である。やはりここでもu_tの中、kを上回る超過需要部分は消失する。$u_t \leqq k$だけが販売によって満たされる。

（6）（7）より次期へ持ち越される在庫は、

（8）$n_{t+1} = k - Min[u_t,\ k]$

である。もし$u_t \geqq k$なら、持ち越される在庫はゼロ（$n_{t+1} = 0$）となり、$u_t < k$であれば、$n_{t+1} = k - u_t$だけが持ち越される。そして次期にはkを維持するため$k - n_t$だけの在庫補塡用生産が行われる。

以上がカーンによるモデルの基本的な部分であり、このモデルを用いてさまざまなケースが分析される。

（2－3）カーンモデル（2）・・・Backlogのある場合

ここでは完全なBacklogのある場合を整理する。簡単化のため（1）で表される需要（便宜上新規需要と呼ぶことにする）は（9）であるとする。

（9）$D_t = d + u_t.$

ここで、前期に発生した超過需要部分を完全にBacklogし、今期に生産販売し対応するものとす

る。前期の超過需要は $u_{t-1} > k$ であるがために発生しているのだから、販売は $S_{t-1} = d + \rho D_{t-1} + Min\ [u_{t-1},\ k] = d + \rho D_{t-1} + k$ であり、前期超過需要（$D_{t-1} - S_{t-1}$）は、

(10) $D_{t-1} - S_{t-1} = u_{t-1} - k$

となる。よって総需要は、

(11) $D_t = d + (u_{t-1} - k) + u_t$

となる。

今期の生産は予想される需要部分（d）と前期よりの超過需要部分（$u_{t-1} - k$）および、前期に最適在庫ストックはすべて販売に回されているため、今期その部分を補塡するための生産部分（k）から構成される。

(12) $Y_t = d + (u_{t-1} - k) + k = d + u_{t-1}$

それゆえ今期の販売は

$$S_t = Min\ [Y_t,\ D_t]$$

となる。（5）と比べて供給側に n_t が存在しないのは、前期において全在庫ストックで需要に対応しても対応しきれずに超過需要まで発生しているため、今期へと持ち越せる在庫が存在しないからである。(3) よって、

$$S_t = Min\ [k,\ u_t]$$

u_t 部分の需要は予測されないため、k によって対応されるから、

(13) $v_t = Min\ [u_t,\ k]$

v は k によって対応し得る量を表し、もし $u_t > k$ という場合には、在庫ストックで対処しきれない部分（$u_t - k$）が発生し、これが今期超過需要である。それは今期の Backlog として次期に生産・販売される。もちろんこのとき

(14) $v_t = k$

である。この（14）より、

$$S_t = Min\ [v_t,\ u_t]$$

当然 $v_t < u_t$ であれば、超過需要部分は今期の Backlog 部分となり、$t + 1$ 期に生産・販売される。

［3］Production-Smoothing を含む場合の最適生産量

（2－2）では、前期の超過需要を完全に Backlog するケースを、限界費用一定という仮定の下で展開した。これはもちろん限界費用が一定であるから可能であり、そうでなければ完全に Backlog することが不可能になる場合が現れる。そのような場合に企業はどれほど Backlog に応じるのかが問題となる。以下ではそのような Production-Smoothing を含む場合の企業の最適生産量を考える。

（3－1）基本となる仮定

ここで用いるモデルは基本的にはカーンモデルのそれであるが、あくまで超過需要が発生している状態に焦点を当てているため、若干の変更をしている。まず需要側は次式とする。(4)

(15) $D_t = cY_{t-1} + \delta z_t + I + u_t$

ここでcは限界消費性向を、Iは設備投資を意味する。なお簡単化のため$0 < c < 1$とIを一定と仮定する。超過需要については今期Backlogし、次期へ受注残高として繰り越すものと仮定し次式を想定する。

(16) $z_{t+1} = (D_t - Y_t)$

しかし、この超過需要残高（受注残高）zが次期にすべて生産対応されるかどうかは不明である。そこでzのうち次期に生産対応される割合をδとするとt期の超過需要の中、次期に生産・販売される量は、

$$\delta z_{t+1} = \delta (D_t - Y_t)$$

である。当然この値はいまのところ未知数である。ただし、もし前期に超過需要が発生しており、前期からの持ち越し（$(1-\delta) z_t$）があるケースは無視する。つまり持ち越しは1期のみ有効であるとする。

生産側は、

(17) $Y_t = E[D_t \mid t] = cY_{t-1} + \delta z_t + I$

となる。さらにY_tについては、以下に示す販売価格についての仮定を施さなくてはならないため、便宜上新規需要に対応する供給部分を$y_t = cY_{t-1} + I$、前期からの受注残高用の供給部分を$y_{zt} = \delta z_t$として区別しておく。したがって生産は、

(18) $Y_t = y_t + y_{zt}$

である。ここでは前期において超過需要が発生していたケースを考えているため、持ち越し在庫ストックn_tはゼロとする。また最適在庫ストックを除いている。

よって今期の販売S_tは、

$$S_t = Min[Y_t, D_t]$$

で与えられる。しかしどれだけ販売されるかは分からない。あくまで生産量は企業の最適化行動の中から決定され、もし$Y_t > D_t$なら$S_t = D_t$となるからである。またたとえ超過需要$Y_t < D_t$があったとしても、必ずしも完全に供給されるとは限らず、$S_t = Y_t$ということも有り得る。

販売価格については価格一定の仮定をはずし、需要曲線が右下がりであり、独占的に行動する企業を想定する。したがって今期の価格p_tは次式によって決定される。

(19) $p_t = p(Y_t)$

ただ、超過需要に対応する販売に対しては、前期の価格の下で受注を受けているため、この部分の販売はp_{t-1}で行われる。よって超過需要部分に対する販売収入は$p_{t-1} y_{zt}$である。

費用関数についてはProduction-Smoothing仮説を考えるため費用逓増型の性質を持つ費用関数Cを仮定する。

(20) $C_t = C(Y_t)$, $C'(Y) > 0$, $C''(Y) > 0$ (一定).

以上の仮定に基づき今期の最適な生産量を求める。

（3－2）基本モデルと最適生産量

企業はt期の利潤と将来利潤の割引現在価値の合計が最大になるように生産量を決定するものとする。そこでt期の利潤を

$$E\left[\sum_{i=0}^{\infty}(1+\theta)^{-i}\left(p_t(y_t)y_t+p_{t-1}y_{zt}-C(Y_t)\right)\mid t\right]$$

で表し、これに（2－1）の仮定を代入して、z_tについての状態評価関数$V(z_t)$（Value function）をもちいてBellman方程式を作ると、[5]

$$(21)\quad V(z_t)=E\left[\sum_{i=0}^{\infty}(1+\theta)^{-i}\left(p_t(y_t)y_t+p_{t-1}y_{zt}-C(Y_t)\right)+V(z_{t+1})\mid t\right]$$

(21)をy_tとy_{zt}で微分すると、

$$(22)\quad V_y(z_t)=p_t+dy_t/dp_t-C_y(Y_t)=0$$

$$(23)\quad V_{yz}(z_t)=-C_{yz}(Y_t)+(1+\theta)^{-1}V_{yz}(z_{t+1})=0$$

となる。ここでp_t+dy_t/dp_tは限界収入であるため、需要の価格弾力性（$\eta<0$）を用いて書き直すと、$p_t+dy_t/dp_t=p_t(1-1/\eta)$となる。

さらに$y_{zt}=\delta z_t$であることに注意してBenveniste-Scheinkmanの定理を用いると、

$$V_z(z_t)=p_{t-1}\delta$$

であるため、この関係から$V_{yz}(z_{t+1})=p_t\delta$であるため、これを(23)に代入し、(22)(23)を合わせ1階条件を整理すると、

$$p_t(1-1/\eta)-C_y(Y_t)+p_t\delta(1+\theta)^{-1}-C_{yz}(Y_t)=0$$

を得る。この条件の経済学的な解釈は図を用いると明確となる。(22)の条件は、新規需要に対する最適生産量は限界収入$p_t(1-1/\eta)$と限界費用$C_y(Y_t)$が一致するところで決まり、同時に価格も決まることを教えている。これらをそれぞれy_tとp_tとしFig. 1に描いている。これはまさに新規需要に対する生産量と価格は独占市場のごとく決定されることを意味する。一方(23)は超過需要に対する生産量が、$t+1$期に1単位販売した場合の限界収入の現在割引価値$p_t\delta(1+\theta)^{-1}$と限界費用$C_{yz}(Y_t)$が等しいところで決定されることを示している。さらに価格は一定p_tであるためこれはまさに超過需要z_tに対する受注生産y_zが完全競争的市場のように決定されることを表している。価格一定から(23)より一意的に生産量y_zがきまる。するとδは定義的に、

$$\delta\equiv y_{zt}/z_t$$

であるため、y_zが決定されるとδが一意的に確定する。もし$y_z<z_t$であれば$\delta<1$であり、受注残高の1部は生産されない。Fig. 2ではz_tがz_aの場合に、最適生産y_zがya_zだけ行われ、1_a部分が生産されないことを表している。他方もし$y_z>z_t$であれば$\delta>1$であり、受注残高はすべて生産・販売されるが、限界収入と限界費用が等しいという意味における最適生産ではないことになる。Fig. 3ではz_tがz_bの場合には、最適生産y_zはya_zであるが、1_b部分が過剰生産となることを示している。しかしこの部分はProduction-Smoothing的に考えれば次期に持ち越される在庫ストックを表していることになる。

Fig. 1

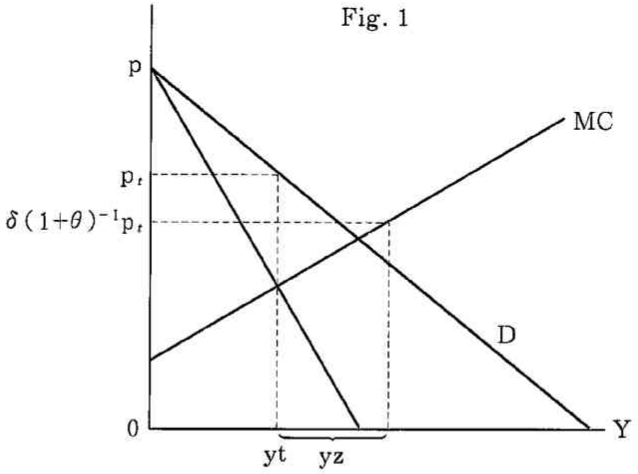


Fig. 2

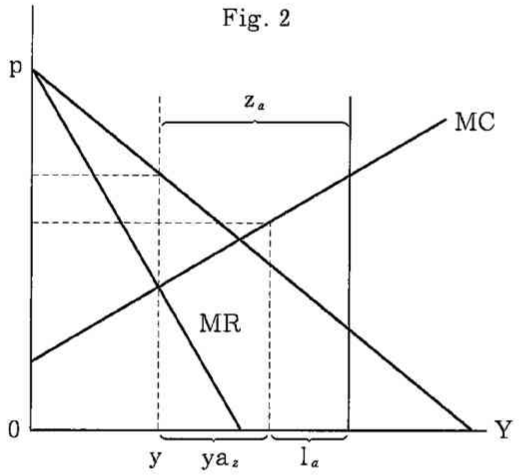
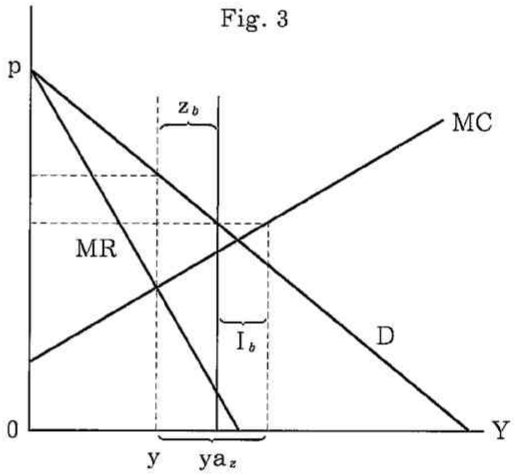


Fig. 3



［4］おわりに

以上の結果より、超過需要に対して予約受注生産（Backlog）で対処する場合、新規需要に対しては生産量・価格を独占企業的に決定することが可能であっても、前期から繰り越された超過需要に対しては完全競争的に振る舞わなくてはならないことが明きらかとなった。これは予約受注生産部分は前期受注したときの価格で販売するという仮定に基づく。しかも、前期受注した製品に対して今期成立する価格を設定することよりも、このような仮定のほうがより現実的であるように思われる。

また、カーンモデルでは超過需要に対してどれだけの割合がBacklogされるかは単に一定の係数として与えられているにすぎないが、本稿ではその係数は利潤最大化行動から決定され、需要状況に応じて変化することを示した。

しかし問題はカーンモデルが超過需要が発生する状況のみを扱っているところにある。なぜならもし超過需要が発生せず、超過供給が発生した場合には意図されない在庫が発生することになり、これが乗数過程を切断する可能性があるためである。たしかに在庫を扱う場合の重要性の1面には、超過需要に

対処するためになされた在庫投資がさらに超過需要を増加させるという面もあるが、意図されない在庫ストックの蓄積による乗数過程の切断とそれによる需要削減という面も重要である。場合によっては不況の原因でありさえする。したがってこの点に関しては今後の課題としたい。

脚注

（1） このような仮定はカーンの原モデルにはなく、カーンでは $n_t - n_{t-1} = Y_t - S_t$ である。しかし以下の議論のため（3）式のように修正している。

（2） ここでの最適在庫ストック保有動機はストックアウト（Stockout）の回避である。

（3） この点が、Backlog がある場合とない場合との最適化の 1 階条件の相違をもたらしている。

（4） カーンモデルでは乗数過程は成立しない。なぜ乗数過程が成立しないか、および乗数過程を明示的に取り入れたモデルについては別稿に譲る。

（5） Bellman 方程式については Sargent [5] pp. 29-33. および Blanchard [1] pp. 279-283. を参照した。

参考文献

[1] Blanchard, Olivier Jean and Stanley Fischer, Lectures on Macroeconomics, The Mit Press, 1989.

[2] Blinder, Alan S. Inventory Theory & Consumer Behaviour, Narvester Wheatsheaf, 1990.

[3] Kahn, James A., "Inventory and Volatility of Production" The American Economic Review, vol. 77, No4, sep. 1987.

[4] Sargent, Thomas J. Macroeconomic Theory, 2nd. ed., Academic Press, Inc., 1987.

[5] Sargent, Thomas J. Dynamic Macroeconomic Theory, Harvard University Press, 1987.