博 士 学 位 論 文

高階微分を含む重力理論の繰り込み可能性と
ユニタリー性について

近　畿　大　学　大　学　院
総合理工学研究科理学専攻
宗　行　賢　二

博　士　学　位　論　文

高階微分を含む重力理論の繰り込み可能性と
ユニタリ―性について

平成　27年　　2月　　2日

近　畿　大　学　大　学　院

総合理工学研究科理学専攻

宗　行　賢　二

目 次

1 序章

この章では重力の量子効果を記述する量子重力理論を研究する目的と問題点について歴史的な背景を交えながら説明する。アインシュタインが提唱した一般相対性理論は、重力を記述する古典論として良く知られている。実際、一般相対性理論による予測は観測結果と非常に良い精度で一致している。有名な例は 1919 年の皆既日食時の光のゆがみ、所謂重力レンズ効果、の観測実験である。

そして一般相対性理論はブラックホールの存在を予測している。ブラックホールというのは非常に強い重力のため、一度飲み込まれると光ですら脱出できない天体の事である。ここで問題になるのが、ブラックホールの内部には特異点という重力が無限大になるような場所が存在している事である。このような特異点では古典的な時空の描像は破綻していると考えられる。ただし古典論では特異点は常にブラックホールの中に隠れていて、さらにブラックホールは定常であるか大きくなることはあってもホライゾンが消滅することはないために、一般相対性理論の破綻は少なくとも外部には見えないと考えられている。

今まで一般相対性理論が古典論である事を強調してきたが、その理由はブラックホールに量子論を適用した場合に問題が生じることである。ホーキングはブラックホールに量子論を適用する事で、ホーキング輻射と呼ばれる熱的な放射がブラックホールから出ている事を発見した [1, 2] 。ただしホーキング輻射は宇宙背景輻射よりずっと低いので、実際に観測する事は困難である。熱的な放射が出ているという事は、ブラックホールの質量が減る事を意味している。つまりブラックホールが蒸発するということであり、特異点がむき出しになってしまう（裸の特異点）問題がある。古典論では裸の特異点が外界にどのような影響を与えるか予測不可能である。そのため量子重力理論が多くの研究者によって盛んに研究されている。

またブラックホールのような局所的な現象だけでなく、宇宙の初期のような大域的な問題にも重力の量子効果が非常に重要であることが分かっている。観測結果と一般相対性理論によれば、宇宙は現在膨張している事が分かっている（この証拠が宇宙背景輻射である）。それはつまり宇宙には始まりがあり、過去に遡れば遡るほど小さくなっていくことが予測できる。この予測から宇宙は無限に高密度な一点から生まれたと考えられている。この無限に高密度な一点とはつまり特異点と同じであり、ブラックホールか宇宙の違いはあれ重力の量子効果が非常に重要である事が分かっていただけたと思う。

今までの歴史的な背景から量子重力理論を研究する意義は分かっていただけたと思う。

ここで疑問に思うのは何故一般相対性理論が提唱されて１００年近く経つのに未だに量子重力理論が発見されていないのか？という事である。それは量子重力理論を作ろうとする試みには困難な問題がいくつもあったためである。これらの困難な問題について歴史的な背景を絡めながら説明していく。

量子重力理論としてまず候補に挙がるのは一般相対性理論を量子化することである。しかし一般相対性理論を量子化しようとすると、繰り込み出来ない問題がある。ここで繰り込みについて簡単に説明する。場の量子論では量子化する際に、元々の古典的な作用に含まれている物理量にずれが生じる（量子補正）。量子補正を受けた物理量が実際の観測量と一致するようにする。しかし例えば電子同士の相互作用による量子補正を計算する際、運動量で積分する事になるが、積分が発散してしまう問題点があった。発散には２種類あり１つは紫外領域（高エネルギー）での発散で、それを紫外発散と呼び、重力理論等で問題となる。もう１つは赤外領域（低エネルギー）での発散で、それを赤外発散と呼び、量子電磁気学で問題となる。ただし実際の物理量は発散していないため、そのような発散する部分を打ち消すような項（相殺項）が必要になってくる。つまり元々の作用に発散する部分と同じ項が含まれていれば発散する部分を打ち消す事が出来るので繰り込み可能である。

一般相対性理論を量子化しようとすると、紫外領域でアインシュタイン項や宇宙項だけでなく曲率の２乗のような高階微分を含む項がいくつも出てきてしまい、２ループ以上でアインシュタイン項、宇宙項および高階微分項が発散する事が分かっている。高階微分を含む項は一般相対性理論の作用（アインシュタイン項と宇宙項）に含まれていないため、繰り込み不可能である事が分かっている [3, 4] 。

そこで Stelle は一般相対性理論自体を修正する事を提唱した [5]。それはアインシュタイン項に４階微分までを含む曲率の２乗の様な項を含む重力理論である。曲率の２乗のような高階微分項を含むと発散がよりひどくなるように思えるが、この理論では高エネルギーでプロパゲータ（伝播子）が $\frac{1}{k^4}$ のように振る舞う。ここで k は４元運動量である。一方一般相対性理論では高エネルギーでプロパゲータは $\frac{1}{k^2}$ のように振る舞う。2.3 章で詳細に説明するが、このプロパゲータの振る舞いの違いにより、高階微分を含む重力理論の方が発散を抑える事が出来る。その結果、高階微分を含む重力理論は繰り込み可能である事が Stelle によって示された [5] 。

しかし同時にプロパゲータの違いにより、新たな問題が生じた。高階微分項を加えることで、一般相対性理論で元々あった伝播モードのスピン２の質量がない重力モードに加え

て、スピン２の質量がある重力モードとスピン０のスカラーモードが現れる事が分かっている [5] 。この質量がある重力モードが問題であり、このモードからユニタリー性を破るゴーストモードが現れてしまう。ユニタリー性を破るということは負のノルム状態が現れることで、つまり負の確率が現れてしまい確率解釈を破ることである。当たり前だが負の確率が現れてしまうと、理論として完全に破綻してしまう。つまり高階微分を含む重力理論は繰り込み可能であるが、同時にユニタリー性を保つ事が出来ない問題点があった [5]。

ところが近年、高階微分を含む重力理論が再び注目を浴びている。しかも４次元ではなく、３次元での重力理論についてである。今まで３次元で高階微分を含む重力理論として Topological Massive Gravity(TMG) が知られていた [6, 7]。この理論はアインシュタイン項にローレンツ・チャーン・サイモン項（LCS 項）と呼ばれる位相不変量を加えたモデルである。このモデルの特徴としては LCS 項が高階微分を含んでいる事とユニタリー性を保っている事である。理論に高階微分項が含まれているため、繰り込み可能であるように思える。しかしこの理論では次元正則化のようなゲージ不変な正則化を使えないため（詳しくは 3 章参照)、おそらく繰り込み出来ないだろうと考えられていた。

しかし近年、New Massive Gravity(NMG) と呼ばれる高階微分を含む重力理論が提唱された [8]。このモデルは TMG のような正則化が使えない問題点がなく、ユニタリー性も破っておらず、繰り込み出来る可能性があった。つまり NMG は繰り込み可能でかつユニタリー性を保つ量子重力理論である可能性があったため、様々な研究者によって近年盛んに研究されている [9, 10, 11]。

ここまでで量子重力理論に繰り込み可能とユニタリー性を保つ事が非常に重要である事が分かったと思う。多くの研究者が繰り込み可能とユニタリー性の保存の両立を目指しているが、別のアプローチを試みる研究が知られている。それは重力理論を"時間"のないリーマン理論で記述するという試みである [12, 13]。

一般相対性理論では時空はローレンツ多様体で記述される。ローレンツ多様体というのは局所的にミンコフスキー空間である多様体の事である。本論文ではミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ の符号は $(-,+,\cdots,+)$ のように、時間を負、空間を正になるように取る。時間だけ負になっているため、ノルムの２乗が必ずしも正になるとは限らない。数学の言葉でいえばローレンツ計量では内積の正定値性を満たしていないため（非退化性は満たす)、不定な内積であると言える。

リーマン理論では時空はリーマン多様体で記述される。リーマン多様体とは局所的にユークリッド空間である多様体の事である。ユークリッド計量 $\delta_{\mu\nu}$ は $(+,\cdots,+)$ のよう

に符号がすべて正である。リーマン理論では時間を特別視していないため、ある意味"時間"がない理論であると考えられる。つまりローレンツ計量とは異なり、内積の正定値性を満たしているので、ノルムの 2 乗が負になるような事は起きない。そのため負のノルムが現れないため、ユニタリー性を破る心配はない。

ただし現実には"時間"があるため単純にリーマン理論で重力理論を記述しても意味がないと思われるかもしれない。しかし向山と Uzan はリーマン理論で clock 場と呼ばれるスカラー場を導入する事で"時間"が現れる事を示した [12]。さらに向山はリーマン理論で高階微分を含む重力理論のモデルを提唱し、低エネルギーで、つまり私達が住む世界で、確かに"時間"が現れる事を示した [13]。つまり繰り込み可能でかつユニタリー性の問題を解決できる重力理論である可能性があった。

歴史的な背景を述べたので、本論文の構成について述べる。まず 2 章では D 次元での高階微分を含む重力理論の繰り込み可能性について考察する。3 章では 3 次元で高階微分を含む重力理論でユニタリー性を保つモデルについて分類を行う。そして繰り込み可能でかつユニタリー性を保つ重力理論があるか考察する。4 章ではリーマン理論での重力理論について説明する。5 章ではリーマン理論での重力理論が繰り込み可能であるか考察する。6 章では結論を述べて、本論文のまとめとする。

2　高階微分を含む重力理論の繰り込み可能性について

この章では、通常の重力理論である一般相対性理論に曲率等の 2 乗のような高階微分を含むことで何故繰り込み可能になるかについて述べる。Stelle の論文では 4 次元での高階微分を含む重力理論の繰り込み可能性について考察している。本論文では後々 4 次元以外の場合についても考察するので、D 次元の場合について考察する。D 次元での高階微分を含む一般的な重力の作用は以下の通りである。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\kappa^2}\int d^Dx\sqrt{-g}\Big[\sigma R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}^2 + \gamma R_{\mu\nu\rho\lambda}^2\Big] \\ &\equiv \frac{1}{\kappa^2}\int d^Dx \mathcal{L}_{GMG} \end{aligned} \tag{1}$$

ここで R はリッチスカラー（曲率)、$R_{\mu\nu}$ はリッチテンソル、$R_{\mu\nu\rho\lambda}$ はリーマンテンソルである。これらの定義に関しては付録を参照してほしい[1]。計量 $g_{\mu\nu}$ の記法は $\mathrm{diag}(-,+,\ldots,+)$ であり、$g \equiv \mathrm{det} g_{\mu\nu}$ である。κ は D 次元での重力定数であり、σ,α,β,γ は定数である。

作用 (1) には一般座標変換 ($x \rightarrow x+\kappa\xi$ の変換) について不変なので、以下の変換にたいして不変である。

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = g_{\alpha\nu}\partial_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\partial_\nu \xi^\alpha + \xi^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} \tag{2}$$

ここで ξ はこの変換に関するパラメータである。

通常、ゲージ理論を量子化する際にはゲージ固定項を導入する。普通古典論を量子化する際は、正準形式を使って行う。ここで問題になるのがゲージ変換には任意性があるため、一意に決めることが出来ない事である。つまりゲージ理論では正準運動量をお互いに独立に決める事が出来ない問題がある。そこでゲージ固定項を導入する事で、ゲージ変換の任意性をなくすことで量子化を行う。ゲージ固定項を導入するとゲージ不変性が作用に残らなくなる。しかし量子論ではゲージ対称性に代わる BRST 対称性と呼ばれる元々のゲージ対称性の性質を引き継いでいるような対称性が存在している。そのため作用はゲージ対称性ではなく、それに代わる BRST 対称性を持つ。BRST 変換の詳細については次節で述べる。

2.1 プロパゲータについて

繰り込み可能性に関して、プロパゲータの高エネルギー領域での振る舞いが重要である。なぜならばプロパゲータは高エネルギーで運動量 k_μ の逆数で効いてくるので、運動量の次数が高ければ高いほど発散を抑える事が出来るためである。そして高階微分項を入れることで、プロパゲータの振る舞いが良くなり、発散を抑える事が出来るのである。この効果を具体的に見るために、2.1 節では高階微分を含む重力のプロパゲータを求める。

プロパゲータを計算するために、ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ の周りでの摂動展開を以下で定義する。

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \kappa h^{\mu\nu} \tag{3}$$

[1] アインシュタインの既約としてギリシャ文字は 0〜$(D-1)$ を数え、ローマ文字は時間を除く 1〜$(D-1)$ の和を数えるとする（0 または t が時間に相当する)。

ここで $h_{\mu\nu}$ は摂動である。これ以降、計算の簡略化のために $\kappa=1$ と置く。式 (3) を作用（1）に代入する事で、作用 (1) のラグランジアンでの摂動の 2 次の項を得る事が出来る。

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4}h^{\mu\nu}\Big[\{(\beta+4\gamma)\Box+\sigma\}P^{(2)} + \frac{\{(D-1)(4\alpha+\beta)+\beta+4\gamma\}\Box-(D-2)\sigma}{(D-2)^2}\{P^{(0,s)} +(D-1)P^{(0,w)}+\sqrt{D-1}(P^{(0,sw)}+P^{(0,ws)})\}\Big]_{\mu\nu,\rho\sigma}\Box h^{\rho\sigma} \tag{4}$$

ここで $\Box\equiv\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ である。途中、以下で定義される D 次元のスピン射影演算子を使った。

$$\begin{aligned}
P^{(2)}_{\mu\nu,\rho\sigma} &= \frac{1}{2}\Big(\theta_{\mu\rho}\theta_{\nu\sigma}+\theta_{\mu\sigma}\theta_{\nu\rho}-\frac{2}{D-1}\theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}\Big),\\
P^{(1)}_{\mu\nu,\rho\sigma} &= \frac{1}{2}(\theta_{\mu\rho}\omega_{\nu\sigma}+\theta_{\mu\sigma}\omega_{\nu\rho}+\theta_{\nu\rho}\omega_{\mu\sigma}+\theta_{\nu\sigma}\omega_{\mu\rho}),\\
P^{(0,s)}_{\mu\nu,\rho\sigma} &= \frac{1}{D-1}\theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma},\quad P^{(0,w)}_{\mu\nu,\rho\sigma}=\omega_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma},\\
P^{(0,sw)}_{\mu\nu,\rho\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{D-1}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma},\quad P^{(0,ws)}_{\mu\nu,\rho\sigma}=\frac{1}{\sqrt{D-1}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{5}$$

ここで P の括弧内の添え字の数字がスピンの数を表しており、$\theta_{\mu\nu},\omega_{\mu\nu}$ の定義は以下で与えられる。

$$\theta_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box},\qquad \omega_{\mu\nu}=\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box} \tag{6}$$

スピン射影演算子は以下の関係式を満たす。

$$(P^{(2)}+P^{(1)}+P^{(0,s)}+P^{(0,w)})_{\mu\nu,\rho\sigma}=\frac{1}{2}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}+\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\sigma}) \tag{7}$$

プロパゲータを求めるには、ゲージ固定項が必要である。しかしゲージ固定項を導入すると、ゲージ不変（重力の場合は一般座標変換不変）ではなくなるので、その代わりに、理論が BRST 変換に対して不変になるようにする必要がある。

まず BRST 変換 δ_B をグラスマン奇な演算子とし、2 回作用すると 0 になるように定義する (冪ゼロ)。次に式 (2) のパラメータ ξ をグラスマン奇な Faddev-Popov ゴースト場（F-P ゴースト場）c^μ に変え、冪ゼロになるように反ゴースト場 $\bar{c}_\mu$ と中西-Lautrup 場（N-L 場）b_μ を導入する。またゴースト、反ゴースト場と N-L 場の添え字の上げ下げは $\eta_{\mu\nu}$ で行う。

そうすると BRST 変換は以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\delta_B g_{\mu\nu} &= -\delta\lambda[g_{\rho\nu}\partial_\mu c^\rho + g_{\rho\mu}\partial_\nu c^\rho + \partial_\rho g_{\mu\nu} c^\rho], \\
\delta_B c^\mu &= -\delta\lambda c^\rho \partial_\rho c^\mu, \\
\delta_B \bar{c}_\mu &= i\delta\lambda\, B_\mu, \\
\delta_B B_\mu &= 0, \\
\delta_B \tilde{g}^{\mu\nu} &= \delta\lambda(\tilde{g}^{\mu\rho}\partial_\rho c^\nu + \tilde{g}^{\nu\rho}\partial_\rho c^\mu - \tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\rho c^\rho - \partial_\rho \tilde{g}^{\mu\nu} c^\rho) \equiv \delta\lambda \mathcal{D}^{\mu\nu}{}_\rho c^\rho
\end{aligned} \tag{8}
$$

ここで $\delta\lambda$ は反交換するパラメータである。

次に BRST 変換に対して理論が不変になるように、以下のようなゲージ固定項と F-P ゴースト項を導入する。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{GF+FP} &= i\delta_B[\bar{c}_\mu(\partial_\nu h^{\mu\nu} - \frac{a}{2}B^\mu)]/\delta\lambda \\
&= -B_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - i\bar{c}_\mu \partial_\nu \mathcal{D}^{\mu\nu}{}_\rho c^\rho + \frac{a}{2} B_\mu B^\mu
\end{aligned} \tag{9}
$$

ここで a はゲージパラメータである。

上記の補助場 B_μ を積分して消して、元のラグランジアン (4) に代入すると、結局ラグランジアンの２次は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2,t} = \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \Big[&\{(\beta + 4\gamma)\Box + \sigma\} P^{(2)} + \frac{1}{a} P^{(1)} + \frac{\{4(D-1)\alpha + D\beta + 4\gamma\}\Box - (D-2)\sigma}{(D-2)^2} \big\{ P^{(0,s)} \\
&+ (D-1)P^{(0,w)} + \sqrt{D-1}\left(P^{(0,sw)} + P^{(0,ws)}\right)\big\} + \frac{2}{a} P^{(0,w)} \Big]_{\mu\nu,\rho\sigma} \Box h^{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{10}
$$

スピン射影演算子の性質等を使うと、以下のような D 次元の重力のプロパゲータを得る事が出来る。

$$
\begin{aligned}
D^D_{\mu\nu,\rho\sigma}(k) = \frac{4}{(2\pi)^D} \Big[&\frac{P^{(2)}}{k^2\{(\beta + 4\gamma)k^2 - \sigma\}} + \frac{(D-2)^2 P^{(0,s)}}{k^2[\{4(D-1)\alpha + D\beta + 4\gamma\}k^2 + (D-2)\sigma]} \\
&- \frac{a}{2k^2}\left\{ 2P^{(1)} + (D-1)P^{(0,s)} + P^{(0,w)} - \sqrt{D-1}\left(P^{(0,sw)} + P^{(0,ws)}\right)\right\} \Big]_{\mu\nu,\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{11}
$$

上記の１項目と２項目を見てわかるように、γ は $\alpha \to \alpha - \gamma$ と $\beta \to \beta - 4\gamma$ と取りなおすと次元に依らず消す事が出来る[2]。そのためこれ以降は γ は 0 と置く事にする。

[2] この操作は摂動の２次の項だけで出来、高次の項では γ の効果を消すことはできない。ただし３次元はワイルテンソルが 0 になる事、４次元ではガウス・ボンネ項が 0 になることから、３，４次元では γ は最

４次元の場合は以下で与えられる [5]。

$$D^4_{\mu\nu,\rho\sigma}(k) = \frac{4}{(2\pi)^D}\Big[\frac{P^{(2)}}{k^2\{\beta k^2-\sigma\}} + \frac{P^{(0,s)}}{k^2[\{3\alpha+\beta\}k^2+2\sigma]} - \frac{a}{2k^2}\left\{2P^{(1)}+3P^{(0,s)}+P^{(0,w)}-\sqrt{3}\left(P^{(0,sw)}+P^{(0,ws)}\right)\right\}\Big]_{\mu\nu,\rho\sigma} \tag{12}$$

上式を見てわかるように、ゲージパラメータ $a = 0$ と取ることでプロパゲータは高エネルギーで、つまり k_μ が十分大きいとすると、$\frac{1}{k^4}$ のように振る舞う。ここでゲージパラメータ $a = 0$ と取ったのは計算の簡略化のためである。通常のアインシュタイン重力では $\alpha = \beta = 0$ なので高エネルギーで $\frac{1}{k^2}$ のように振る舞う。このように高階微分項がある場合とない場合では高エネルギーでのプロパゲータの振る舞いが違う事がわかる。

３次元の場合は以下で与えられる [15]。

$$D^3_{\mu\nu,\rho\sigma}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\Big[\frac{P^{(2)}}{k^2(\beta k^2-\sigma)} + \frac{P^{(0,s)}}{k^2\{(8\alpha+3\beta)k^2+\sigma\}} - \frac{a}{2k^2}(2P^{(1)}+2P^{(0,s)}+P^{(0,w)})-\sqrt{2}(P^{(0,sw)}+P^{(0,ws)})\Big]_{\mu\nu,\rho\sigma} \tag{13}$$

ランダウゲージ $a = 0$ と取ることで、D 次元の重力のプロパゲータ (11) の３項目以降を落とせるので簡略化できる。ランダウゲージだと以下の関係式が成り立つ。

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 \tag{14}$$

つまりランダウゲージを取ることで、プロパゲータ（11）は、$k^\mu D_{\mu\nu,\rho\sigma}(k) = 0$ を満たす。

2.2 Slavnov-Taylor 恒等式

2.1 節で BRST 対称な作用が決まったので、2.2 節では Slavnov-Taylor 恒等式（S-T 恒等式）を用いることで、量子論的に有効な作用の発散部分を求める事が出来る。

S-T 恒等式を求めるためにまず、グラスマン奇な外場 $K_{\mu\nu}$ とグラスマン偶な外場 L_μ を

初から 0 と置ける

元々の作用（1）に加える。そうすると BRST 変換不変な作用は

$$\begin{aligned} S_{sym}[h_{\mu\nu}, \bar{c}_\alpha, c^\beta, K_{\mu\nu}, L_\rho] &= \int d^D x [\mathcal{L}_{GMG} + \mathcal{L}_{GF+FP} + K_{\mu\nu}\mathcal{D}^{\mu\nu}{}_\rho c^\rho - L_\mu c^\nu \partial_\nu c^\mu] \\ &\equiv \int d^D x \ \mathcal{L}_{sym} \end{aligned} \tag{15}$$

となる。上記の作用から汎関数は

$$\begin{aligned} Z[J_{\mu\nu}, \bar{\eta}_\alpha, \eta^\beta, K_{\mu\nu}, L_\rho] &= \int [dh][d\bar{c}][dc] \exp\left(i \int d^D x [\mathcal{L}_{sym} + J_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \bar{\eta}_\alpha c^\alpha + \bar{c}_\alpha \eta^\alpha] \right) \\ &\equiv \exp\big(iW[J_{\mu\nu}, \bar{\eta}_\alpha, \eta^\beta, K_{\mu\nu}, L_\rho] \big) \end{aligned} \tag{16}$$

となる。ここでグラスマン偶な外場 $J_{\mu\nu}$ とグラスマン奇な外場 $\eta_\alpha, \bar{\eta}_\beta$ を導入した。式 (16) は BRST 変換に対して不変なので

$$0 = \int [dh][d\bar{c}][dc] \delta_B \exp\left(i \int d^D x [\mathcal{L}_{sym} + J_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \bar{\eta}_\alpha c^\alpha + \bar{c}_\alpha \eta^\alpha] \right) \tag{17}$$

となる。この結果から以下の式を得る。

$$\left\langle \int d^D x \left[J_{\mu\nu} \mathcal{D}^{\mu\nu}{}_\rho c^\rho + \bar{\eta}_\mu c^\nu \partial_\nu c^\mu + i \frac{1}{a} \eta_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} \right] \right\rangle = 0 \tag{18}$$

ここで $\langle \mathcal{O} \rangle = \int [dh][d\bar{c}][dc] \ \mathcal{O} \ \exp(iW[J^{\mu\nu}, \bar{\eta}_\alpha \eta_\beta, K_{\mu\nu}, L_\lambda])$ である。式 (18) から S-T 恒等式は以下のようになる。

$$\int d^D x \left[J_{\mu\nu} \frac{\delta W}{\delta K_{\mu\nu}} - \bar{\eta}_\mu \frac{\delta W}{\delta L_\mu} + \frac{i}{a} \eta^\mu \partial_\nu \frac{\delta W}{\delta J_{\mu\nu}} \right] = 0 \tag{19}$$

ゴーストの運動方程式は

$$\partial_\nu \frac{\delta W}{\delta K_{\mu\nu}} + i\eta_\mu = 0 \tag{20}$$

となる。量子論的に有効な作用を以下で定義する。

$$\tilde{\Gamma}[h^{\mu\nu}, \bar{c}_\alpha, c^\beta, K_{\mu\nu}, L_\rho] \equiv W[J_{\mu\nu}, \bar{\eta}_\alpha, \eta^\beta, K_{\mu\nu}, L_\rho] - \int d^D x \, [J_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \bar{\eta}_\alpha c^\alpha + \bar{c}_\alpha \eta^\alpha] \tag{21}$$

式 (16) から以下の関係式が成り立つ事が分かる。

$$h^{\mu\nu} = \frac{\delta W}{\delta J_{\mu\nu}}, \quad c^{\mu} = \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_{\mu}}, \quad \bar{c}_{\mu} = -\frac{\delta W}{\delta \eta^{\mu}} \tag{22}$$

また逆の場合を計算すると以下の結果を得る。

$$J_{\mu\nu} = -\frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta h^{\mu\nu}}, \quad \bar{\eta}_{\alpha} = \frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta c^{\alpha}}, \quad \eta^{\alpha} = -\frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta \bar{c}_{\alpha}} \tag{23}$$

以下の様に有効作用を定義しなおすと S-T 恒等式を求める際に式を簡略化できる。

$$\Gamma = \tilde{\Gamma} + \int d^D x \frac{1}{2a}(\partial_{\nu} h^{\mu\nu})^2 \tag{24}$$

S-T 恒等式を求める際に、以下の関係式を使うと便利である。

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta K_{\mu\nu}} = \frac{\delta W}{\delta K_{\mu\nu}}, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta L_{\mu}} = \frac{\delta W}{\delta L_{\mu}} \tag{25}$$

上記の関係式を使うとゴーストの運動方程式は以下の結果を得る。

$$\partial^{\nu} \frac{\delta \Gamma}{\delta K_{\mu\nu}} - i \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}^{\mu}} = 0 \tag{26}$$

これらの結果から S-T 恒等式は

$$\int d^D x \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta h^{\mu\nu}} \frac{\delta \Gamma}{\delta K_{\mu\nu}} + \frac{\delta \Gamma}{\delta c^{\mu}} \frac{\delta \Gamma}{\delta L_{\mu}} \right] = 0 \tag{27}$$

となる。有効作用をループの次数 l で展開すると

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(l)} \tag{28}$$

となる。ここで 0 ループの有効作用は $\Gamma^{(0)} = \mathcal{L}_{sym}$ である。

次に任意の n ループの有効作用 $\Gamma^{(n)}$ について考察する。まず $(n-1)$ ループまではすでに結合定数の繰り込み等の繰り込みの操作はされているとし、つまり $(n-1)$ ループまでの有効作用は発散しないということである、ループの各次数で S-T 恒等式 (27) が成り立

つと考える。つまりループの各次数で

$$\int d^4x \left[\frac{\delta\Gamma^{(n)}}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} \frac{\delta\Gamma^{(n)}}{\delta K_{\mu\nu}} + \frac{\delta\Gamma^{(n)}}{\delta c^\lambda} \frac{\delta\Gamma^{(n)}}{\delta L_\lambda} \right] = 0, \qquad n = 0, 1, 2, 3 \cdots$$

上式が成り立つということである。そして任意の n ループの有効作用 $\Gamma^{(n)}$ を発散する部分と有限な部分に分けると

$$\Gamma^{(n)} = \Gamma^{(n)}_{\rm finite} + \Gamma^{(n)}_{\rm div} \tag{29}$$

となる。そして式 (28) を 0 から任意の n まで展開し、S-T 恒等式 (27) に代入する。そして左辺に発散する項を右辺に有限な項に分けると以下のようになる。

$$\int d^4x \left[\frac{\delta\Gamma^{(n)}_{\rm div}}{\delta K_{\mu\nu}} \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{\delta\Gamma^{(n)}_{\rm div}}{\delta c^\mu} \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta L_\mu} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta h^{\mu\nu}} \frac{\delta\Gamma^{(n)}_{\rm div}}{\delta K_{\mu\nu}} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c^\mu} \frac{\delta\Gamma^{(n)}_{\rm div}}{\delta L_\mu} \right]$$
$$= -\int d^4x \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{\delta\Gamma^{(n-i)}_{\rm finite}}{\delta h^{\mu\nu}} \frac{\delta\Gamma^{(i)}_{\rm finite}}{\delta K_{\mu\nu}} + \frac{\delta\Gamma^{(n-i)}_{\rm finite}}{\delta c^\rho} \frac{\delta\Gamma^{(i)}_{\rm finite}}{\delta L_\rho} \right] \tag{30}$$

ここで $(n-1)$ ループまでの発散する部分は、すでに繰り込みの操作がされているとして消去した。また $D = 4$ としているが、D 次元でも成り立つ。右辺は正則化として次元正則化[3]を用いると $\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{d-4}$ の極を持つが、右辺は $\epsilon \to 0$ で有限になるのでそれぞれ分離する事が出来、つまり S-T 恒等式は以下のようになる。

$$\int d^Dx \left[\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta K_{\mu\nu}} \frac{\delta}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta L_\lambda} \frac{\delta}{\delta c^\lambda} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta h^{\mu\nu}} \frac{\delta}{\delta K_{\mu\nu}} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c^\lambda} \frac{\delta}{\delta L_\lambda} \right] \Gamma^{(n)}_{\rm div} = 0 \tag{31}$$

ここでは 4 次元から D 次元に戻した。上式を満たす $\Gamma^{(n)}_{div}$ の形は大変複雑なので、理論の発散する部分を計算するのが大変煩雑になってしまう。そのため Stelle の方法を用いてより簡単に理論の発散する部分を求める方法について次節で述べる。

2.3 繰り込み可能性

理論の繰り込みについては実際にファインマン図を使いループからの寄与を計算すればわかる。ただしこの方法では計算が煩雑になり大変である。単純に繰り込み可能であるか

[3]正則化の 1 つでまず運動量積分を計算する際に運動量積分が収束するように d 次元にまで拡張してから計算する。その後その積分を $d{=}4$ の周りで展開すると（今は 4 次元の場合で説明しているが、任意次元でも同様の結果になる）、必要な結果が得られる。この際発散する部分には $\frac{1}{d-4} = \frac{1}{\epsilon}$ の極を持っている。

否かをみる場合は次元勘定定理を使うと便利である。次元勘定定理とは任意のファインマン図の発散の次数を数えることで、その理論が繰り込み可能であるかを判定できる指標である。

次元勘定定理で必要になる任意のファインマン図で使う記法は以下で定義する。重力の自己相互作用に関してはアインシュタイン項には微分が 2 つあり、高階微分項は微分が 4 つあるため区別している。

$V_{h,2}$: R から出てくる 2 階微分を含む重力の自己相互作用バーテックスの数

$V_{h,4}$: R^2 等から出てくる 4 階微分を含む重力の自己相互作用バーテックスの数

V_c: 2 階微分を含むゴースト-反ゴースト-重力相互作用バーテックスの数

V_K: K-重力-ゴースト相互作用バーテックスの数

V_L: L-ゴースト-ゴースト相互作用バーテックスの数

I_h: 重力のプロパゲータの内線の数

I_c: ゴーストのプロパゲータの内線の数

E_h: 重力のプロパゲータの外線の数

E_c: ゴーストのプロパゲータの外線の数

重力のプロパゲータは高エネルギー領域で $\frac{1}{k^4}$ の様に振る舞い、F-P ゴーストのプロパゲータは $\frac{1}{k^2}$ のように振る舞うので、任意のファインマン図での D 次元での発散の次数 D_{div} は以下のようになる。

$$D_{div} = DL - 4I_h - 2I_c + 4V_{h,4} + 2V_{h,2} + 2V_c + V_K + V_L \tag{32}$$

ループ運動量の数 L は以下の関係式が成り立つ。

$$L = I_h + I_c + I_s - (V_{h,4} + V_{h,2} + V_c + V_K + V_L - 1) \tag{33}$$

上記の関係式を使うと発散の次数は以下のようになる。

$$D_{div} = D + (D-4)(I_h - V_{h,4} - V_{s,4}) + (D-2)(I_c - V_{h,2} - V_c) - (D-1)(V_K + V_L) \tag{34}$$

さらに以下の関係式を用いると

$$2V_c + V_K + 2V_L = 2I_c + E_c + E_{\bar{c}} \tag{35}$$

発散の次数は以下の結果を得る。

$$D_{div} = D - (4-D)(I_h - V_{h,4}) - (D-2)V_{h,2} - \frac{D}{2}V_K - V_L - \frac{D-2}{2}(E_c + E_{\bar{c}}) \tag{36}$$

上式の結果と式 (31) を満たす発散項は大変多いため計算が煩雑になってしまう。そこで簡略化するために、Stelle が用いた方法に倣う事にする [5] 。

この問題を解決するために少し唐突だが、式（9）のゴースト-反ゴースト-重力相互作用項について考察する。この相互作用は部分積分を繰り返すことで以下のように簡略化できる。

$$i[\partial_\rho \partial_\mu \bar{c}_\nu \cdot c^\nu h^{\mu\rho} + \partial_\mu \bar{c}_\nu \cdot c^\nu \partial_\rho h^{\mu\rho} + \partial_\mu \bar{c}_\nu \cdot c^\mu \partial_\rho h^{\nu\rho}] \tag{37}$$

ランダウゲージを取っているため、上式の２項目と３項目を落とす事が出来る。１項目を部分積分し続ける（$h_{\mu\nu}$ にかかる項は落ちるので）と以下の結果を得る。

$$i\partial_\rho \partial_\mu \bar{c}_\nu \cdot c^\nu h^{\mu\rho} \approx i\bar{c}_\nu \partial_\rho \partial_\mu c^\nu h^{\mu\rho} \tag{38}$$

上式の意味する所は、１粒子既約なファインマン図ではゴーストと反ゴーストはそれぞれ外線運動量を２つ運ぶため（ランダウゲージを取っているので $k^\mu D_{\mu\nu,\rho\sigma}(k) = 0$ の関係式を満たすので重力のプロパゲータの部分は運動量を運ばない)、それぞれの外線の因子 $E_c, E_{\bar{c}}$ が２つずつ増える事になる。その結果発散の次数は以下のようになる。

$$D_{div}^{(1PI)} = D - (4-D)(I_h - V_{h,4}) - (D-2)V_{h,2} - \frac{D}{2}V_K - V_L - \frac{D+2}{2}(E_c + E_{\bar{c}}) \tag{39}$$

１粒子既約なファインマン図では $I_h - V_{h,4} \geq 0$ となるので（発散するファインマン図ではバーテックスが１つあれば、必ず内線が現れるため)、次元 $D \leq 4$ ならば発散しない

ことがいえる。

まず $D=4$ の場合に焦点を当てる。１粒子既約な発散の次数は以下の様になる。

$$D_{div}^{(1PI)} = 4 - 2V_{h,2} - 2V_K - V_L - 3(E_c + E_{\bar{c}}) \tag{40}$$

上記の結果から理論の発散する部分を計算する。そのためにまず発散するファインマン図を探す。可能性があるものは重力の自己相互作用項を除くと、ゴースト数が保存しなければならないので３つしかない。

$$\begin{aligned} D_{div}^{(1PI)} &\leq -2 \quad \text{ゴーストタイプ} \\ D_{div}^{(1PI)} &\leq -1 \quad \text{K タイプ} \\ D_{div}^{(1PI)} &\leq -3 \quad \text{L タイプ} \end{aligned}$$

ここでゴーストタイプというのは外線がゴーストと反ゴーストからなる任意のファインマン図である。K タイプは外線が K とゴーストからなる任意のファインマン図である。L タイプは外線がゴースト２つと L からなる任意のファインマン図である。

これら３つのタイプの発散の次数は負になるので、これらのファインマン図は発散しない事が分かる。つまり以下の式をそれぞれ得る事が出来る。

$$\frac{\delta\Gamma^{(n)}_{\text{div}}}{\delta c^{\lambda}} = \frac{\delta\Gamma^{(n)}_{\text{div}}}{\delta K^{\mu\nu}} = \frac{\delta\Gamma^{(n)}_{\text{div}}}{\delta L_{\lambda}} = 0 \tag{41}$$

これらの結果を受け S-T 恒等式（31）は以下のようになる。

$$\int d^4x \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta K^{\mu\nu}} \frac{\delta\Gamma^{(n)}_{\text{div}}}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} = 0 \tag{42}$$

上式は理論の発散する部分が $\tilde{g}^{\mu\nu} \to \tilde{g}^{\mu\nu} + \delta_B\tilde{g}^{\mu\nu}$ の対称性を持っている事を意味している。つまり発散高はゲージ不変な $g^{\mu\nu}$ から成る、せいぜい微分が４つまで含まれる関数である事を意味している。微分が４つまでしか含まれないのは、発散の次数 (40) が４以下だからである。そして計量は次元を持っていないため、後は微分の数によって決まる。結局、

許される発散項は微分が曲率の２乗のような４階微分を含む項、２個のアインシュタイン項と微分が０個の宇宙項だけである。微分を３つ含むゲージ不変な項は LCS 項があるが（LCS 項については次章で述べる）、今考えている理論はパリティが保存しているためそのような項は許されない（LCS 項が存在すれば理論はパリティを破る）。

最後に $D=3$ の場合に焦点を当てる。１粒子既約な発散の係数は以下のようになる。

$$D_{div}^{(1PI)} = 3 - (I_h - V_{h,4}) - V_2 - \frac{3}{2}V_K - V_L - \frac{5}{2}(E_c + E_{\bar{c}}) \tag{43}$$

上記の結果から発散項を計算する。そのためにまず発散するファインマン図を探す。可能性があるものは重力の自己相互作用項を除くと、ゴースト数が保存しなければならないので３つしかない。

$$\begin{array}{lcll} D_{div}^{(1PI)} & \leq & -2 & \text{ゴーストタイプ} \\ D_{div}^{(1PI)} & \leq & -1 & \text{K タイプ} \\ D_{div}^{(1PI)} & \leq & -3 & \text{L タイプ} \end{array}$$

上式からこれらのファインマン図は発散しない事が分かる。つまり以下の式を得る事が出来る。

$$\frac{\delta\Gamma_{\mathrm{div}}^{(n)}}{\delta c^{\lambda}} = \frac{\delta\Gamma_{\mathrm{div}}^{(n)}}{\delta K^{\mu\nu}} = \frac{\delta\Gamma_{\mathrm{div}}^{(n)}}{\delta L_{\lambda}} = 0 \tag{44}$$

これらの結果を受け S-T 恒等式（31）は以下のようになる。

$$\int d^3x \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta K^{\mu\nu}} \frac{\delta\Gamma_{\mathrm{div}}^{(n)}}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} = 0 \tag{45}$$

上記の式の意味する事は発散項がゲージ不変な $g^{\mu\nu}$ から成る、せいぜい微分が３つまで含まれる関数である事を意味している。それが許される発散項は微分が２個のアインシュタイン項と微分が０個の宇宙項だけである。微分を３つ含むゲージ不変な項は LCS 項があるが、今考えている理論はパリティが保存しているためそのような項は許されない。

結果をまとめると、高階微分を含む重力理論は５次元以上では繰り込み不可能ではある

が、３，４次元では繰り込み可能である事が分かった。次章ではこの結果を用いて、さらにユニタリ一性について考察していく。

3　高階微分を含む重力理論のユニタリ一性について

前章では高階微分を含む重力理論の繰り込み可能性について考察した。その結果、３，４次元では繰り込み可能である事が分かった。しかし高階微分を含む重力理論には致命的な問題がある事を Stelle はすでに言及している [5] 。

それは高階微分を含む重力理論は、ユニタリ一性を破ってしまうことである。４次元でのプロパゲータ（12）を見ればわかると思うが、α と β をどう調整してもゴーストが現れてしまう問題がある。ゴーストが現れるという事はユニタリ一性を破る事と同義であるため理論が破綻してしまう。そのため高階微分を含む重力理論はあまり日の目を見なかった。

しかし最近、NMG と呼ばれる高階微分を含む３次元での重力理論がユニタリ一性を保っている事が分かった。高階微分を含むため NMG は繰り込みが出来る可能性があった。そのため本当に繰り込み可能であるか研究する必要があった。具体的に繰り込み可能かどうかを検証する前に３次元での重力理論について簡単にまとめる事にする。

３次元重力理論の特徴としては、自由度が少ない為、４次元に比べて理論が簡単である事である。３次元の場合リーマンテンソルの自由度は６つで、リッチテンソルの自由度も６つあるので、つまりリーマンテンソルはリッチテンソルと同じ内容しか持てない事を意味している。その結果３次元でのアインシュタイン重力に至ってはリーマンテンソルが 0 になるために、物質場がなければこれは局所的に平坦である事を意味している。これはつまり重力波が存在しない事を意味している。

重力波がないことから、研究する意義があるように思えないかもしれないが、高階微分を含むことでここの問題を回避できる。また３次元のモデルを４次元のごく近距離での近似としてのモデルとしても利用できる可能性があるために研究する意義は十分にあると思われる。

ユニタリ一性を保つ高階微分を含む３次元の重力理論でまず NMG を紹介したが、Deser により TMG と呼ばれる理論がすでに提唱されている。具体的な作用の形は NMG ともども後で記述するが、TMG はパリティを破っている問題がある。されに TMG は完全反対

称テンソルを含むため、次元正則化を使えない問題もあり、繰り込みの操作が困難である問題もあった。

それに比べ NMG はパリティを保ち、完全反対称テンソルのような次元に依る量が入っていないため、次元正則化を使う事が出来ることが TMG にない利点である。そのためこの章で NMG が繰り込み可能かを検証する。検証する前にユニタリー性を保つ理論の分類から始める事にする。なぜならば NMG や TMG 以外にも高階微分を含みながらユニタリー性を保つモデルは他にもあるからである。

ユニタリー性の議論は [14] を参考にした。[14] は 3 次元及び 4 次元でかつ宇宙項がある場合での議論であるが、この章では 3 次元でかつ宇宙項がない場合について考察する。

ユニタリー性について具体的にみるために、計量 $g_{\mu\nu}$ をミンコフスキー空間 $\eta_{\mu\nu}$ の周りで展開する ($g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$)。摂動展開を 2 章と変更した理由はこちらの方が計算が簡単だからである。そうすると作用 (1) の 2 次は以下のようになる。

$$S^{(2)}_{GMG}(h)=\int d^3x\left[-\frac{\sigma}{2}h^{\mu\nu}G^{(1)}_{\mu\nu}(h)+(4\alpha+\beta)\left[G^{(1)}(h)\right]^2+\beta G^{(1)}_{\mu\nu}(h)G^{(1)\mu\nu}(h)+\mathcal{L}^{(2)}_{LCS}(h)\right] \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)}_{LCS}(h)&\equiv\frac{1}{2\mu}\varepsilon^{\lambda\mu\nu}\Gamma^{(1)\rho}{}_{\lambda\sigma}\partial_\mu\Gamma^{(1)\sigma}{}_{\rho\nu}\\&=\frac{1}{4\mu}\varepsilon^{\lambda\mu\nu}\partial_\mu h^\rho_{\ \lambda}\left(\partial_\rho\partial_\sigma h^\sigma_{\ \nu}-\Box h_{\rho\nu}\right)\end{aligned} \tag{47}$$

ここで $\varepsilon^{\lambda\mu\nu}$ は完全反対称テンソルである。上式内のアインシュタインテンソルの 1 次 $G^{(1)}_{\mu\nu}(h)$ 等の詳しい形は付録を参照してほしい。

次に摂動 $h_{\mu\nu}$ を以下のように分解する [11] 。

$$\begin{aligned}h_{ij}&=(\partial_i h_j+\partial_j h_i)+\varepsilon_{il}\varepsilon_{jl}\phi^{lk}\\h_{ti}&=\eta_i+\varepsilon_{ij}\psi^j\\h_{tt}&=n\end{aligned} \tag{48}$$

ここで $h,\ \phi,\ \eta,\ \psi$ と n の添え字は $(\cdots)_l\equiv\frac{\partial_l}{\sqrt{-\nabla^2}}(\cdots)$ を意味する[4](ここで $\nabla^2\equiv\partial_a^2$である)。また添え字 t が時間で添え字 $i,j,\cdots$ が空間を表し、空間の添え字は上げ下げで符号が変わらないので、添え字の上下はあまり気にしない事にする。

[4] $(\cdots)$ の $\cdots$ は $h,\ \phi,\ \eta,\ \psi$ と n のいずれかである。

次に余分な自由度を取り除くために、ゲージ条件を以下のように取る。

$$\begin{aligned} \partial^j h_{ij} &= 0 \\ \partial^i h_{0i} &= 0 \end{aligned} \tag{49}$$

そうすると式 (48) は以下のようになる。

$$\begin{aligned} h_{ij} &= -\left(\eta_{ij}\phi + \phi_{ij}\right) \\ h_{ti} &= \varepsilon_{ij}\psi^j \\ h_{tt} &= n \\ h &= -\left(n + \phi\right) \end{aligned} \tag{50}$$

上記の結果を式 (46) に代入すると、ラグランジアンの 2 次は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)}_{GMG}(h) = &\frac{\beta}{2}\tilde{\psi}\Box\tilde{\psi} + \frac{\sigma}{2}\tilde{\psi}^2 + \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\left[\left(\nabla^2 n\right)^2 + \left(\Box\phi\right)^2\right] \\ &+ 2\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right)\Box\phi\nabla^2 n - \frac{\sigma}{2}\phi\nabla^2 n + \frac{1}{2\mu}\left(\nabla^2 n - \Box\phi\right)\tilde{\psi} \end{aligned} \tag{51}$$

ここで $\tilde{\psi} \equiv \partial_i\psi_i$ の変数変換を行った。

3.1 $\alpha = \beta = 0$ の場合

式 (51) で $\alpha = \beta = 0$ の場合を考えてみる。この場合ラグランジアンは

$$\mathcal{L}^{(2)}_{GMG}(h) = \frac{\sigma}{2}\tilde{\psi}^2 + \frac{1}{2\mu}\left(\nabla^2 n - \Box\phi\right)\tilde{\psi} - \frac{\sigma}{2}\nabla^2 n \cdot \psi \tag{52}$$

となる。$\tilde{\psi}$ の運動方程式 $\tilde{\psi} = -\frac{1}{2\sigma\mu}\left(\nabla^2 n - \Box\phi\right)$ を使うと (Euler-Lagrange 方程式から)、ラグランジアンは以下のようになる。

$$\mathcal{L}^{(2)}_{GMG}(h) = -\frac{1}{8\sigma\mu^2}\left(\nabla^2 n\right)^2 + \left(\frac{1}{4\sigma\mu^2}\Box\phi - \frac{\sigma}{2}\phi\right)\nabla^2 n - \frac{1}{8\sigma\mu^2}\left(\Box\phi\right)^2 \tag{53}$$

今度は $\nabla^2 n$ の運動方程式 $\nabla^2 n = \left(\Box - 2\sigma^2\mu^2\right)\phi$ を使うと最終的にラグランジアンは

$$\mathcal{L}^{(2)}_{GMG}(h) = \frac{1}{2}\phi\left[-\sigma\Box + \sigma\mu^2\right]\phi \tag{54}$$

となり、$\sigma=-1$ の場合のみゴーストは生じない。これはよく知られたTMGである [6, 7]。
この場合の作用は以下のようになる。

$$S_{TMG}=\frac{1}{\kappa^2}\int d^3x\left[-\sqrt{-g}R+\mathcal{L}_{LCS}\right] \tag{55}$$

3.2 $\alpha+\frac{\beta}{2}=0$ の場合

$\alpha+\frac{\beta}{2}=0$ の場合、(51) のラグランジアンは以下のようになる。

$$\mathcal{L}^{(2)}_{GMG}(h)=\left(\tilde{\psi},\,\nabla^2 n,\,\phi\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(\beta\Box+\sigma\right) & \frac{1}{4\mu} & -\frac{1}{4\mu}\Box \\ \frac{1}{4\mu} & 0 & -\frac{1}{4}\left(\beta\Box+\sigma\right) \\ -\frac{1}{4\mu}\Box & -\frac{1}{4}\left(\beta\Box+\sigma\right) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\psi} \\ \nabla^2 n \\ \phi\end{pmatrix} \tag{56}$$

ここでゴーストが生じるかどうか見るために、簡単のため $\mu\to\infty$ と取ると、式 (56) から β が正でも負でも $\Box$ の前の係数が少なくとも1つは負になるので、最低1つはゴーストが生じてしまう。この事を具体的に見るには式 (56) のラグランジアンを対角化すればいい。

具体的に見ていくためにまず $\frac{\epsilon}{m^2}\equiv\beta$、$m\tilde{\psi}'\equiv\tilde{\psi}$ 、$m\nabla^2 n'\equiv\nabla^2 n$、$m\phi'\equiv\phi$ の変数変換を行う。ここで m は次元1、ϵ は無次元の任意の定数である。そしてラグランジアン (56) を対角化すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)}_{GMG}(h)&=\frac{1}{2}\left(\tilde{\psi}',\,\nabla^2 n',\,\phi'\right)\begin{pmatrix}\epsilon\Box+\sigma m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\epsilon\Box+\frac{\sigma}{2}m^2 \\ 0 & -\frac{1}{2}\epsilon\Box+\frac{\sigma}{2}m^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\psi}' \\ \nabla^2 n' \\ \phi'\end{pmatrix} \\ &=\frac{1}{2}\left(\tilde{\psi}',\,\nabla^2 n',\,\phi'\right)P^{-1}\begin{pmatrix}\epsilon\Box+\sigma m^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\epsilon\Box+\frac{\sigma}{2}m^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\epsilon\Box-\frac{\sigma}{2}m^2\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}\tilde{\psi}' \\ \nabla^2 n' \\ \phi'\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{57}$$

となる。ここで P は適当な3行3列の行列である。式 (57) から ϵ の正負にかかわらず最低1つゴーストが生じるので $\alpha+\frac{\beta}{2}=0$ の場合は必ずゴーストが生じる。そして仮に μ が有限だとしても、$\Box$ の符号には影響を与えないので結論は変わらない。

3.3 $\alpha + \frac{\beta}{2} \neq 0$ の場合

$\alpha + \frac{\beta}{2} \neq 0$ の場合は式 (51) を以下のように変形する必要がある。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(2)}_{GMG}(h) = &\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\left[\nabla^2 n + \frac{\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right)\Box\phi - \frac{\sigma}{4}\phi + \frac{1}{4\mu}\tilde{\psi}}{\alpha + \frac{\beta}{2}}\right]^2 + \frac{\left(\alpha + \frac{3}{8}\beta\right)\beta}{2\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}(\Box\phi)^2 \\
&+ \tilde{\psi}\left[\frac{\beta}{2}\Box + \frac{8\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\mu^2\sigma - 1}{16\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\mu^2}\right]\tilde{\psi} - \tilde{\psi}\left[\frac{8\left(\alpha + \frac{3}{8}\beta\right)\Box - \sigma}{8\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\mu}\right]\phi \\
&+ \phi\left[\frac{8\sigma\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right)\Box - \sigma^2}{16\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}\right]\phi
\end{aligned}
\tag{58}
$$

この式の第 1 項は n の運動方程式から消す事が出来るので以下の議論では考えない。また少なくとも第 2 項があればゴーストが生じてしまうので、α と β には $\alpha + \frac{3}{8}\beta = 0$ か $\beta = 0$ の制限がかかる。

まず $\alpha + \frac{3}{8}\beta = 0$ の場合を考える。その条件の下でラグランジアンは

$$
\mathcal{L}^{(2)}_{GMG}(h) = \tilde{\psi}\left[\frac{\beta}{2}\Box + \frac{\beta\mu^2\sigma - 1}{2\beta\mu^2}\right]\tilde{\psi} + \frac{\sigma}{\beta\mu}\tilde{\psi}\phi - \phi\left[\frac{\sigma}{2}\Box + \frac{\sigma^2}{2\beta}\right]\phi \tag{59}
$$

となる。式 (59) からゴーストが生じないためには $\beta > 0$ と $\sigma = 0, -1$ の制限がかかる事が分かる。$\sigma = 1$ の場合でゴーストが生じるのは、3.2 節と同様に $\sigma = 1$ の条件で対角化すれば分かるが、3.2 節のように簡単な形ではないのでここでは省力する。ここで見通しをよくするために $\varphi \equiv \sqrt{\beta}\psi$ と変数変換すると、

$$
\mathcal{L}^{(2)}_{GMG}(h) = \frac{1}{2}\left(\varphi,\, \phi\right)\begin{pmatrix} \Box - \frac{1-\sigma\beta\mu^2}{(\beta\mu)^2} & \frac{\sigma}{\sqrt{\beta^3\mu^2}} \\ \frac{\sigma}{\sqrt{\beta^3\mu^2}} & -\sigma\Box - \frac{\sigma^2}{\beta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \phi \end{pmatrix} \tag{60}
$$

となる。まず $\sigma = 0$ の場合を考えると、ラグランジアンは

$$
\mathcal{L}^{(2)}_{GMG}(h) = \frac{1}{2}\varphi\left[\Box - m^2\right]\varphi \tag{61}
$$

となる。ここで $m^2 = \frac{1}{(\beta\mu)^2}$ である。そして式 (61) からゴーストが生じず、また $\beta > 0$ の場合のみ質量の 2 乗も負にならない事が分かる。そして $\mu \to \infty$ の場合は Deser によって考察された [11] 。

次に $\sigma=-1$ の場合を考える。ラグランジアンを対角化すると

$$\mathcal{L}^{(2)}_{GMG}(h)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\varphi, \phi\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}\Box-m_+^2 & 0\\ 0 & \Box-m_-^2\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}\varphi\\ \phi\end{pmatrix} \tag{62}$$

となる。ここで質量の 2 乗は

$$m_\pm^2=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{2\left(\beta\mu\right)^2}\left[1\pm\sqrt{1+4\beta\mu^2}\right]$$

である。上式からゴーストが生じず、質量の 2 乗も負にならない事が分かる。そしてこれは $\mu\to\infty$ で NMG と呼ばれる理論である [8] 。

まとめると式 (61) と式 (62) から $\sigma=0$ か $\sigma=-1$ でかつ $\beta>0$ の場合のみゴーストとタキオンも出ない事が分かる。

この場合の作用は以下のようになる。

$$S_{NMG}=\frac{1}{\kappa^2}\int d^3x\left\{\sqrt{-g}\left[\sigma R+\beta\left(R^2-\frac{3}{8}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right)\right]+\mathcal{L}_{LCS}\right\} \tag{63}$$

$$\mathcal{L}^{(2)}_{GMG}(h)=\begin{pmatrix}\tilde{\psi}, \phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{16\alpha\mu^2} & -\frac{1}{2\mu}\Box+\frac{\sigma}{16\alpha\mu}\\ -\frac{1}{2\mu}\Box+\frac{\sigma}{16\alpha\mu} & \frac{\sigma}{2}\Box-\frac{\sigma^2}{16\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\psi}\\ \phi\end{pmatrix} \tag{64}$$

このラグランジアンを $\sigma=0,\pm1$ のそれぞれどの場合で対角化しても、$\Box$ の係数に正負の両方の符号が現れるので、必ずゴーストが生じてしまう。そのためラグランジアンにもう一つ別の条件 $\mu\to\infty$ を課すと、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}^{(2)}_{GMG}(h)=\frac{\sigma}{2}\tilde{\psi}^2+\phi\left[\frac{\sigma}{2}\Box-\frac{\sigma^2}{16\alpha}\right]\phi \tag{65}$$

となる。第 1 項は $\tilde{\psi}$ の運動方程式から消せるので無視すると、$\sigma=-1$ でかつ $\alpha>0$ の場合のみゴーストもタキオンも生じない。

この場合の作用は以下のようになる。

$$S_{R^2}=\frac{1}{\kappa^2}\int d^3x\sqrt{-g}\left[-R+\alpha R^2\right] \tag{66}$$

そして今までの結果は表 1 にまとめてある。

表 1: ユニタリティを保つ理論の分類

α, β	σ	μ
$\alpha = \beta = 0$	$\sigma = -1$	任意
$\alpha = -\frac{3}{8}\beta,\ \beta > 0$	$\sigma = -1$	任意
$\alpha = -\frac{3}{8}\beta,\ \beta > 0$	$\sigma = 0$	任意
$\alpha > 0,\ \beta = 0$	$\sigma = +1$	$\mu \to \infty$

3.4 3次元での高階微分を含む重力理論の繰り込み可能性とユニタリー性について

前節の結果を用いて、3次元での高階微分を含む理論の繰り込み可能性とユニタリー性について考察する。高階微分を含む3次元重力理論は繰り込み可能なので、同時にユニタリー性も保っているかを見ていく。

まず $8\alpha + 3\beta = 0, \beta > 0$ かつ $\sigma = -1$ の場合と $\alpha > 0, \beta = 0$ かつ $\sigma = +1$ の場合について考察する。この場合では両社ともにプロパゲータが $\frac{1}{k^2}$ のように振る舞うので、発散の係数は

$$D^{(1PI)} = 3 + I_h + V_{h,4} - V_{h,2} - \frac{3}{2}V_K - V_L - \frac{5}{2}(E_c + E_{\bar{c}}). \tag{67}$$

となる。この場合ではバーテックスが増えれば増えるほど発散してしまう。この場合発散を取り除こうとするとBRST対称性を保ち、また2階微分まででなくより高次の微分を含む無限個の相殺項が必要になり、繰り込みが出来ないと考えられる。

次に $\alpha = -\frac{3}{8}\beta,\ \beta > 0$ かつ $\sigma = 0$ の場合について考察する。この場合、$\sigma = 0$ なので式(43)で $V_{h,2} = 0$ と置く必要がある（なぜなら $\sigma = 0$ なので、アインシュタイン項がないため2階微分の重力相互作用がない為である)。そしてこの場合、前節よりプロパゲータをうまく決めることが出来ないが、しかしDeserはプロパゲータが $\frac{1}{k^4}$ のように振る舞うと主張されている。仮にこの主張が正しいとすると、この場合発散の係数は $D^{(1PI)} \leq 3$ となり、繰り込み可能のように思える。その場合発散項は宇宙項とアインシュタイン項である。ただし元の作用に両者とも含まれていないため結局繰り込みは可能ではない。

結論として高階微分を含む3次元重力理論は繰り込み可能であり、高階微分項は量子補正を受けないという性質が分かった。しかし残念なことに同時にユニタリー性を保つこと

は今までの議論からできない事が分かった。

4　リーマン理論での重力理論について

前章で高階微分を含む重力理論のユニタリー性と繰り込み可能性について述べた。もう一度結論を述べるとユニタリー性と繰り込み可能は両立しない事が分かった。

ただし何らかの対称性から悪い振る舞いをするモードを取り除く事が出来れば、ユニタリー性を保ったまま繰り込み可能になる可能性はある。しかしこれは少し希望的観測に過ぎない可能性が高い。理由としては例としてユニタリー性を保つ NMG を考える。NMG はユニタリー性を保つが、スカラーモードが $\frac{1}{k^2}$ の様に悪い振る舞いをする。その結果繰り込み不可能ではあるが、ここでは何らかの手段でスカラーモードを取り除く事が出来たと繰り込み可能であると仮定する。NMG は $8\alpha + 3\beta = 0$ の特別な係数であるときだけ成り立つ。ここで問題になるのが普通繰り込みの操作をすると α や β が元々の値からずれる可能性があることである。

そのため結局繰り込みの操作をすると、ユニタリー性を破る恐れがある。つまりユニタリー性と繰り込み可能の両立は困難であると考えられる。

そこで“ 時間 ”のないリーマン理論で重力理論を記述するというアイディアが提案された。一般相対性理論では時空はローレンツ多様体である。また計量はローレンツ計量 $(-,+,+,+)$ であり、当然"時間"はある。リーマン理論で重力を記述するというアイディアは、時空はリーマン多様体であり、その計量はユークリッド計量 $(+,+,+,+)$ で記述されるということである。ユークリッド計量ではローレンツ計量のように"時間"を特別視していない、つまり“ 時間 ”がない理論である。

なぜこのような"時間"がない理論を考えるのかというと、重力理論に高階微分項があることで生じるユニタリー性を破る問題を避けるためである。なぜならばユニタリー性というのはつまり確率の保存であるが、これは"時間"があるために生じる問題である。最初から"時間"がなければユニタリー性の問題を考える必要がなく、繰り込み可能性についてのみ考えれば良いことになるからである。

しかしここで単純な疑問が生じると思う。つまり現実の世界には"時間"がある事についてである。一般相対性理論や量子力学にしてみても時間があることが前提であるので、"時間"のないリーマン理論を考えることに意味があるのか？という問題である。次節以降

で述べるが、驚くべき事に私達が住む世界、つまり低エネルギー領域で"時間"が現れるのである。

つまり繰り込みの問題が生じる高エネルギー領域では"時間"のないリーマン理論で重力を記述できるので高階微分があることで生じるユニタリ一性の問題が現れない。そして低エネルギーでは通常のローレンツ計量での記述と一致するので"時間"がない問題は回避できる。

4.1 節ではまずスカラー場でかつユークリッド計量で平坦な場合について考える。そして"時間"が確かに表れ、ミンコフスキー計量で記述されたスカラー場の結果を一致する事をします。

4.2 節では重力場について低エネルギーでかつユークリッド計量で記述された重力理論がローレンツ計量で記述された理論と一致する事を示す。

4.1 リーマン理論でのスカラー場について

まず重力場を考える前に、簡単な例としてスカラー場でかつ平坦な場合を考える。まずユークリッド計量 $g^E_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ で記述される４次元リーマン多様体 M を考える（添え字の E はユークリッドで記述されている事をします)。計量を見てわかるように、ミンコフスキー空間と違い、"時間"に相当する部分がない事が分かる。ただ現実には"時間"が存在するので、局所的には ”時間 ”が現れなければならない。そこで"時間"が現れるために、ここでスカラー場 ϕ を導入する。唐突にスカラー場 ϕ を導入したが、このスカラー場 ϕ が普段私たちが使う“ 時間 ”と深く関連がある事は後に述べる。またあとで別のスカラー場が現れるためスカラー場 ϕ はこれ以降 clock 場と呼ぶ事にする。clock 場の微分はリーマン空間のある領域 M_0 では０ではないとする（０だと"時間"が現れなくなるためである)。つまり M_0 上で $\partial_\mu \phi = \text{const} \neq 0$ であるとする。そうすると M_0 上で

$$\partial_\mu \phi = M^2 n_\mu \tag{68}$$

と置く事が出来る。ここで n_μ は $\delta^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 1$ を満たすベクトルであり、M は n_μ を無次元にするために導入した質量次元１を持つ定数である。ノルムは M_0 上で $X_E \equiv \delta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = M^4 > 0$ となるので、座標の１つを以下のように取る事が出来る（負になる場合は以下の

ように取れない)。

$$dt = n_\mu dx^\mu \tag{69}$$

上記の結果から

$$t \equiv \frac{\phi}{M^2} \tag{70}$$

と置ける。そうすると4次元でのリーマン空間の計量は以下のように書き直す事が出来る。

$$\begin{aligned} ds_E^2 &= \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= (n_\mu dx^\mu)^2 + (\delta_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu) dx^\mu dx^\nu \\ &= dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \end{aligned} \tag{71}$$

考え方としては、独立な3つの座標からなる3次元超曲面 Σ_t に直交するベクトル n_μ を導入した結果である。

次に以下のようなユークリッド計量でのスカラー場 χ の作用を考える。もちろんこの段階では時間に相当する部分は存在しない。

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - V(\chi) + \frac{1}{M^4} (\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \chi)^2 \right] \tag{72}$$

1項目はスカラー場の運動項で、2項目は $V(\chi)$ はスカラー場のポテンシャル項であり、3項目は clock 場とスカラー場が結合した項である。上記の1項目は $\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi = (\partial_t\chi)^2 + \delta^{ij}\partial_i\chi\partial_j\chi$ に分解でき(この段階では t にただの記法以上の特別な意味はない)、さらに M_0 上ならば3項目は $\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\chi = M^4(\partial_t\chi)^2$(72) に代入すると、式 (72) は以下のように clock 場を消す事が出来る。

$$S = \int dt d^3x \left[\frac{1}{2} (\partial_t \chi)^2 - \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \chi \partial_j \chi - V \right] \tag{73}$$

さらに上式の1項目と2項目をまとめると、これは4次元での"時間"があるミンコフスキー空間でのスカラー場の作用と一致する。

$$S = \int dt d^3x \left[-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - V \right] \tag{74}$$

この結果は驚くべきことである。M_0 上に制限しているとはいえ、元々"時間"方向がなかったが clock 場とスカラー場が結合する項を加える事で"時間"が現れたと言える。このことからスカラー場 ϕ が"時間"と密接にかかわっているため clock 場と呼ぶ事に違和感はないだろう。

この理論の考え方としては、リーマン多様体がもつ対称性が上記の過程で当然破れるが、自発的対称性の破れのように元々理論が持っていた対称性が破れることで"時間"が現れたと考えられる。また clock 場 ϕ には shift 対称性 ($\phi \to \phi +$ constant) と Z_2 対称性 ($\phi \to -\phi$) の二つの対称性を持つが、これはちょうど"時間"が持つ対称性と一致している。

4.2 低エネルギーでの重力理論について

この節では、リーマン理論での重力理論について考察する。理論の対称性として shift 対称性 ($\phi \to \phi + \text{const.}$) と Z_2 対称性 ($\phi \to -\phi$) がある。これらの対称性を満たしかつパリティを保つ、４次元で clock 場と結合している高階微分を含む重力の作用は以下のようになる [13] 。

$$
\begin{aligned}
S = \int d^4x\sqrt{g_E}\Big[&Z\Big(-R_E + 2\Lambda_E + \alpha R_E^2 + \beta R_{E\mu\nu}^2 + \gamma R_{E\mu\nu\rho\lambda}^2\Big) + Z_0(\nabla_\mu^E\phi)^2 + Z_1 R_E(\nabla_\mu^E\phi)^2 \\
&+ Z_2 R_E^{\mu\nu}\nabla_\mu^E\phi\nabla_\nu^E\phi + Z_3(g^{\mu\nu}\nabla_\mu^E\phi\nabla_\nu^E\phi)^2 + Z_4(\Box_E\phi)^2 + Z_5(\nabla_\mu^E\nabla_\nu^E\phi)^2\Big] \qquad (75)
\end{aligned}
$$

ここでこの章以降は ∇_μ^E は共変微分である。Λ_E はユークリッド計量での宇宙項である。添え字の E は通常のローレンツ計量と区別するためについている。Z は前章までの $\frac{1}{\kappa^2}$ と同じであるが、簡略化のために書きなおした。４次元では Gauss-Bonnet 項が０になるので $\gamma = 0$ と置ける。Z_2 は部分積分と Z_4 と Z_5 を再定義すれが消す事が出来る。Z_3 は clock 場 ϕ を再定義して 1 になるように書き直す。そうすると作用 (75) は以下のように書き直す事が出来る。

$$
\begin{aligned}
S = \int d^4x\sqrt{g_E}\Big[&Z\Big(-R_E + 2\Lambda_E + \alpha R_E^2 + \beta R_{E\mu\nu}^2\Big) + Z_0 X_E + Z_1 X_E R_E \\
&+ X_E^2 + Z_4(\Box_E\phi)^2 + Z_5(\nabla_\mu^E\nabla_\nu^E\phi)^2\Big] \qquad (76)
\end{aligned}
$$

ここで $X_E \equiv \quad g^E_{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ である。

上記の作用がリーマン理論での高階微分を含む重力理論で取り扱う作用である。この理論が高エネルギー領域で繰り込み可能であるかは次章で考察する。この節では低エネルギーで、つまり私達が住む世界で、上記の理論がローレンツ計量で記述される理論と一致するかを考察する。そのためにいくつか仮定する必要がある。

まず低エネルギーでは重力の高階微分項は落とせるとする。つまり M_0 上では Z に比べて X_E は十分に大きいとする。そうすると低エネルギーでの作用は以下のようになる。

$$S_{IR} = \int d^4x\sqrt{g_E}\Big[(Z_1X_E - Z)R_E + 2Z\Lambda_E + Z_0X_E + X_E^2 - 2Z_1\left\{(\Box_E\phi)^2 - (\nabla^E_\mu\nabla^E_\nu\phi)^2\right\}\Big] \tag{77}$$

ここで $Z_4 = -Z_5 = -2Z_1$ と置いた [13] 。さらにまとめると以下の作用のようになる。

$$S_{IR} = \int d^4x\sqrt{g_E}\Big[G_4(X_E)R_E + K(X_E) - 2G_4'(X_E)\left\{(\Box_E\phi)^2 - (\nabla^E_\mu\nabla^E_\nu\phi)^2\right\}\Big] \tag{78}$$

ここで $'$ は X_E の微分である。関数 $G_4(X_E)$ と $K(X_E)$ は以下で与えられる。

$$G_4(X_E) = Z_1X_E - Z, \quad K(X_E) = 2Z\Lambda_E + Z_0X_E + X_E^2 \tag{79}$$

次にローレンツ計量での場合を考える。低エネルギーでローレンツ計量の作用は以下で与えられる。

$$S_{IR} = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[f(X)R_E + P(X) + 2f_4'(X)\left\{(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\right\}\Big] \tag{80}$$

ここで $X \equiv \quad -g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ である。

次にユークリッド計量での作用 (78) とローレンツ計量での作用 (80) が一致する条件を考察する。詳しい計算手順は省くが、式 (70) が成り立つ事を使い、さらに 2 つの作用を ADM 形式のように時間と空間の (1+3) 分解する。そしてその結果以下の関係式が成り立てば、低エネルギーでユークリッド計量での作用 (78) がローレンツ計量での作用 (80) と

一致する [13] 。

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= g^E_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}{X_c} \\
g^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}_E + \frac{g^{\mu\rho}_E g^{\nu\sigma}_E \partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi}{X_c - X_E} \\
\frac{1}{X} &= \frac{1}{X_c} - \frac{1}{X_E} \\
\frac{f(X)}{\sqrt{X}} &= \frac{G_4(X_E)}{\sqrt{X_E}} \\
\frac{P(X)}{\sqrt{X}} &= \frac{K(X_E)}{\sqrt{X_E}}
\end{aligned}
\tag{81}
$$

ここで X_c は M_0 上で $X_E > X_c$ であり、正の定数である。

5　リーマン理論での重力理論の繰り込み可能性について

前章において低エネルギー領域でリーマン理論での重力理論がローレンツ計量での重力理論と一致し、確かに"時間"が現れる事が分かった。この章ではこの理論が繰り込み可能であるかを考察する。

clock 場と結合している高階微分を含む D 次元での作用は以下のようになる [16] 。

$$
\begin{aligned}
S = \int d^Dx\sqrt{-g}\Big[&\frac{1}{\kappa^2}\Big(R + \alpha R^2 + \beta R^2_{\mu\nu} + \gamma R^2_{\mu\nu\rho\lambda}\Big) + Z_0(\nabla_\mu\phi)^2 + Z_1 R(\nabla_\mu\phi)^2 \\
&+ Z_2 R^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + Z_3(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi)^2 + Z_4(\Box\phi)^2 + Z_5(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\Big] \\
= \int d^Dx \, &\mathcal{L}_{GMG+\phi}
\end{aligned}
\tag{82}
$$

ここで α, β, γ と $Z_i(i = 0, \ldots, 5)$ は定数である。また Z_5 は他の項を部分積分する事で他の項に吸収できるので、これ以降 $Z_5 = 0$ と置く。本来上記の作用はユークリッド計量で記述すべきではある。しかし繰り込み可能かどうか考察する場合、どちらの計量を使ってもほとんど変わらないため、本論文ではローレンツ計量で繰り込み可能かどうかの考察を行う。

5.1 プロパゲータ

プロパゲータを計算するために、ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ の周りでの摂動展開を以下で定義する。

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \tag{83}$$

上記の式を作用（82）に代入すると、ラグランジアンの摂動の 2 次を得る事が出来る。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = \ & \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \Big[\{(\beta+4\gamma)\Box+1\} P^{(2)} + \frac{\{(D-1)(4\alpha+\beta)+\beta+4\gamma\}\Box-(D-2)}{(D-2)^2} \{ P^{(0,s)} \\ & + (D-1)P^{(0,w)} + \sqrt{D-1}(P^{(0,sw)}+P^{(0,ws)}) \} \Big]_{\mu\nu,\rho\sigma} \Box h^{\rho\sigma} + \phi(Z_4\Box+Z_0)\Box\phi \end{aligned} \tag{84}$$

途中で出てくるスピン演算子は式 (5) と同じである。2 章で行ったように、この理論が以下の BRST 変換に不変になるようにゲージ固定項と F-P ゴースト項を決めなければならない。

$$\begin{aligned} \delta_B g_{\mu\nu} &= -\delta\lambda[g_{\rho\nu}\partial_\mu c^\rho + g_{\rho\mu}\partial_\nu c^\rho + \partial_\rho g_{\mu\nu} c^\rho], \\ \delta_B c^\mu &= -\delta\lambda c^\rho \partial_\rho c^\mu, \\ \delta_B \bar{c}_\mu &= i\delta\lambda\, B_\mu, \\ \delta_B B_\mu &= 0, \\ \delta_B \phi &= -\delta\lambda c^\rho \partial_\rho \phi \end{aligned} \tag{85}$$

上式の最後の部分が clock 場に対する BRST 変換である。それ以外は 2 章と同じである。そして clock 場はスカラー場なので、ゲージ固定する必要がないので、ゲージ固定項と F-P 項は 2 章の式 (9) と同じである。

2 章と上記の結果を用いると、重力と clock 場のそれぞれのプロパゲータは以下の結果

となる。

$$
\begin{aligned}
D^{h}_{\mu\nu,\rho\sigma}(k) =& \frac{4}{(2\pi)^D}\Big[\frac{P^{(2)}}{k^2\{(\beta+4\gamma)k^2-1\}} + \frac{(D-2)^2 P^{(0,s)}}{k^2[\{4(D-1)\alpha+D\beta+4\gamma\}k^2+D-2]} \\
& - \frac{a}{2k^2}\left\{2P^{(1)} + (D-1)P^{(0,s)} + P^{(0,w)} - \sqrt{D-1}\left(P^{(0,sw)}+P^{(0,ws)}\right)\right\}\Big]_{\mu\nu,\rho\sigma}
\end{aligned}
\tag{86}
$$

$$
D^{\phi}(k) = \frac{1}{(2\pi)^D}\frac{1}{k^2(Z_4k^2+Z_0)} \tag{87}
$$

上記の式から、プロパゲータが高エネルギーの領域で、$\frac{1}{k^4}$ のように振る舞う事が分かる。

ランダウゲージ $a=0$ と取ることで、重力のプロパゲータ (87) の 3 項目以降を落とせるので簡略化できる。ランダウゲージだと以下の関係式が成り立つ。

$$
\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 \tag{88}
$$

ランダウゲージをとることで、上記のプロパゲータは、$k^\mu D_{\mu\nu,\rho\sigma}(k)=0$ を満たす。

5.2 Slavnov-Taylor 恒等式

前節で BRST 対称な作用が決まったので、この節では S-T 恒等式を用いて、量子論的に有効な作用の発散部分を求めていく。内容は 2 章と似通っているが、clock 場が結合しているため、やや複雑になっている。

S-T 恒等式を求めるためにまず、グラスマン奇な外場 $K_{\mu\nu}$、M とグラスマン偶な外場 L_μ を元々の作用に加える。そうすると BRST 変換不変な作用は

$$
\begin{aligned}
&I_{sym}[h_{\mu\nu}, \bar{c}_\alpha, c^\beta, K_{\mu\nu}, L_\rho, M] \\
&\qquad = \int d^Dx[\mathcal{L}_{GMG+\phi} + \mathcal{L}_{GF+FP} + K_{\mu\nu}\mathcal{D}^{\mu\nu}{}_\rho c^\rho - L_\mu c^\nu\partial_\nu c^\mu - Mc^\rho\partial_\rho\phi] \\
&\qquad \equiv \int d^Dx\, \mathcal{L}_{sym}
\end{aligned}
\tag{89}
$$

となる。上記の作用から汎関数は

$$
\begin{aligned}
& Z[J_{\mu\nu}, \bar{\eta}_\alpha, \eta^\beta, N, K_{\mu\nu}, L_\rho, M] \\
& \quad = \int [dh][d\phi][d\bar{c}][dc] \exp\left(i \int d^D x [\mathcal{L}_{sym} + J_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + N\phi + \bar{\eta}_\alpha c^\alpha + \bar{c}_\alpha \eta^\alpha] \right) \\
& \quad \equiv \exp\left(iW[J_{\mu\nu}, \bar{\eta}_\alpha, \eta^\beta, K_{\mu\nu}, L_\rho, M] \right)
\end{aligned}
\tag{90}
$$

となる。ここでグラスマン偶な外場 $J_{\mu\nu}$、N とグラスマン奇な外場 $\eta_\alpha, \bar{\eta}_\beta$ を導入した。式 (90) は BRST 変換に対して不変なので

$$
0 = \int [dh][d\phi][d\bar{c}][dc] \delta_B \exp\left(i \int d^D x [\mathcal{L}_{sym} + J_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + N\phi + \bar{\eta}_\alpha c^\alpha + \bar{c}_\alpha \eta^\alpha] \right) \tag{91}
$$

となる。この結果から以下の式を得る。

$$
\left\langle \int d^D x \left[J_{\mu\nu} \mathcal{D}^{\mu\nu}{}_\rho c^\rho - N c^\rho \partial_\rho \phi + \bar{\eta}_\mu c^\nu \partial_\nu c^\mu + i \frac{1}{a} \eta_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} \right] \right\rangle = 0 \tag{92}
$$

ここで $\langle \mathcal{O} \rangle = \int [dh][d\phi][d\bar{c}][dc]\ \mathcal{O}\ \exp\left(iW[J^{\mu\nu}, N, \bar{\eta}_\alpha, \eta_\beta, K_{\mu\nu}, L_\lambda], M \right)$ である。式 (92) から S-T 恒等式は以下のようになる。

$$
\int d^D x \left[J_{\mu\nu} \frac{\delta W}{\delta K_{\mu\nu}} + N \frac{\delta W}{\delta M} - \bar{\eta}_\mu \frac{\delta W}{\delta L_\mu} + \frac{i}{a} \eta^\mu \partial_\nu \frac{\delta W}{\delta J_{\mu\nu}} \right] = 0 \tag{93}
$$

ゴーストの運動方程式は

$$
\partial_\nu \frac{\delta W}{\delta K_{\mu\nu}} + i\eta_\mu = 0 \tag{94}
$$

となる。量子論的に有効な作用を以下で定義する。

$$
\begin{aligned}
& \tilde{\Gamma}[h^{\mu\nu}, \phi, \bar{c}_\alpha, c^\beta, K_{\mu\nu}, L_\rho, M] \\
& \quad \equiv \quad W[J_{\mu\nu}, \bar{\eta}_\alpha, \eta^\beta, K_{\mu\nu}, L_\rho, M] - \int d^D x \left[J_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + N\phi + \bar{\eta}_\alpha c^\alpha + \bar{c}_\alpha \eta^\alpha \right]
\end{aligned}
\tag{95}
$$

式 (90) から以下の関係式が成り立つ事が分かる。

$$
h^{\mu\nu} = \frac{\delta W}{\delta J_{\mu\nu}}, \quad \phi = \frac{\delta W}{\delta N}, \quad c^\mu = \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_\mu}, \quad \bar{c}_\mu = -\frac{\delta W}{\delta \eta^\mu} \tag{96}
$$

また逆の場合を計算すると以下の結果を得る。

$$J_{\mu\nu} = -\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta h^{\mu\nu}}, \quad N = -\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\phi}, \quad \bar{\eta}_\alpha = \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta c^\alpha}, \quad \eta^\alpha = -\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\bar{c}_\alpha} \tag{97}$$

以下の様に有効作用を定義しなおすと S-T 恒等式を求める際に式を簡略化できる。

$$\Gamma = \tilde{\Gamma} + \int d^D x \frac{1}{2a}(\partial_\nu h^{\mu\nu})^2 \tag{98}$$

S-T 恒等式を求める際に、以下の関係式を使うと便利である。

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta K_{\mu\nu}} = \frac{\delta W}{\delta K_{\mu\nu}}, \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta M} = \frac{\delta W}{\delta M}, \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta L_\mu} = \frac{\delta W}{\delta L_\mu} \tag{99}$$

上記の関係式を使うとゴーストの運動方程式は以下の結果を得る。

$$\partial^\nu \frac{\delta\Gamma}{\delta K_{\mu\nu}} - i\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^\mu} = 0 \tag{100}$$

S-T 恒等式は

$$\int d^D x \left[\frac{\delta\Gamma}{\delta h^{\mu\nu}}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_{\mu\nu}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta c^\mu}\frac{\delta\Gamma}{\delta L_\mu} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}\frac{\delta\Gamma}{\delta M}\right] = 0 \tag{101}$$

となる。2 章と同様に有効作用をループの各次数で展開して整理すると S-T 恒等式は以下の結果を得る。

$$\int d^D x \left[\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta K_{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta h^{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta K_{\mu\nu}} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta L_\lambda}\frac{\delta}{\delta c^\lambda} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c^\lambda}\frac{\delta}{\delta L_\lambda} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\phi}\frac{\delta}{\delta M} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta M}\frac{\delta}{\delta\phi}\right]\Gamma^{(n)}_{\mathrm{div}} = 0 \tag{102}$$

5.3　繰り込み可能性

2 章と同様に次元勘定定理を用い理論が繰り込み可能であるか判断する。次元勘定定理で必要になる任意のファインマン図で使う記法で 2 章以外で新しく出てくる記法は以下で定義する。clock 場と重力の相互作用に関しては微分が 2 つある項と、微分が 4 つある項があるため区別しなければならない。

$V_{s,4}$: 4 階微分を含む clock 場の自己相互作用バーテックスの数

$V_{hs,2}$: 2 階微分を含む重力と clock 場の相互作用バーテックスの数

$V_{hs,4}$: ４階微分を含む重力と clock 場の相互作用バーテックスの数

V_M: M-重力-ゴースト相互作用バーテックスの数

I_s: clock 場のプロパゲータの内線の数

高エネルギー領域で重力のプロパゲータと clock 場のプロパゲータは $\frac{1}{k^4}$ のように振る舞い、F-P ゴーストのプロパゲータは $\frac{1}{k^2}$ のように振る舞うので、任意のファインマン図での D 次元での発散の次数 D_{div} は以下のようになる。

$$\begin{aligned} D_{div} &= D-(4-D)(I_h+I_s-V_{h,4}-V_{s,4}-V_{hs,4})-(D-2)(V_{h,2}+V_{hs,2}) \\ &\quad -\frac{D}{2}(V_K+V_M)-V_L-\frac{D-2}{2}(E_c+E_{\bar{c}}) \end{aligned} \tag{103}$$

以下の関係式が成り立つ。

$$2V_c+V_K+2V_L+V_M=2I_c+E_c+E_{\bar{c}} \tag{104}$$

2 章の議論から、ゴーストと反ゴーストの外線の因子はそれぞれ２つずつ増えるため、発散の次数は以下のようになる。

$$\begin{aligned} D_{div}^{(1PI)} &= D-(4-D)(I_h+I_s-V_{h,4}-V_{s,4}-V_{hs,4})-(D-2)(V_{h,2}+V_{hs,2}) \\ &\quad -\frac{D}{2}(V_K+V_M)-V_L-\frac{D+2}{2}(E_c+E_{\bar{c}}) \end{aligned} \tag{105}$$

１粒子既約なファインマン図では $(I_h+I_s-V_{h,4}-V_{s,4}-V_{hs,4})$ となるので、次元 $D\leq 4$ ならば発散しないことがいえる。

$D=3$ の場合に焦点を当てる。１粒子既約な発散の係数は以下のようになる。

$$\begin{aligned} D_{div}^{(1PI)} &= 3-(I_h+I_s-V_{h,4}-V_{s,4}-V_{hs,4}) \\ &\quad -(V_{h,2}+V_{hs,2})-\frac{3}{2}(V_K+V_M)-V_L-\frac{5}{2}(E_c+E_{\bar{c}}) \end{aligned} \tag{106}$$

上記の結果から発散項を計算する。そのためにまず発散するファインマン図を探す。可能性があるものは重力の自己相互作用項を除くと、ゴースト数が保存しなければならないの

で４つしかない。

$$
\begin{aligned}
D^{(1PI)}_{div} &\leq -2 \quad \text{ゴーストタイプ} \\
D^{(1PI)}_{div} &\leq -1 \quad \text{K タイプ} \\
D^{(1PI)}_{div} &\leq -3 \quad \text{L タイプ} \\
D^{(1PI)}_{div} &\leq -1 \quad \text{M タイプ}
\end{aligned}
\tag{107}
$$

ここで M タイプは外線が M とゴーストからなる任意のファインマン図である。

これら４つのタイプの発散の次数は負になるので、これらのファインマン図は発散しない事が分かる。つまり以下の式を得る事が出来る。

$$
\frac{\delta\Gamma^{(n)}_{\text{div}}}{\delta c^{\lambda}} = \frac{\delta\Gamma^{(n)}_{\text{div}}}{\delta K^{\mu\nu}} = \frac{\delta\Gamma^{(n)}_{\text{div}}}{\delta L_{\lambda}} = \frac{\delta\Gamma^{(n)}_{\text{div}}}{\delta M} = 0 \tag{108}
$$

これらの結果を受け S-T 恒等式（102）は以下のようになる。

$$
\int d^3x \left[\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta K^{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta M}\frac{\delta}{\delta\phi}\right]\Gamma^{(n)}_{\text{div}} = 0 \tag{109}
$$

上記の式の意味する事は発散項はゲージ不変な $g^{\mu\nu}$ と ϕ から成る、せいぜい微分が３つまで含まれる関数である事を意味している。それが許される発散項は微分が２個のアインシュタイン項と微分が０個の宇宙項、そして $(\nabla_\mu\phi)^2$ だけが許される。微分を３つ含むゲージ不変な項は LCS 項があるが、今考えている理論はパリティが保存しているためそのような項は許されない。また ϕ^2 の項は shift 対称性から許されない。

最後に $D=4$ の場合に焦点を当てる。１粒子既約な発散の次数は以下の様になる。

$$
D^{(1PI)}_{div} = 4 - 2(V_{h,2} + V_{hs,2}) - 2(V_K + V_M) - V_L - 3(E_c + E_{\bar{c}}) \tag{110}
$$

上記の結果から相殺項を計算する。そのためにまず発散するファインマン図を探す。可能性があるものは重力の自己相互作用項を除くと、ゴースト数が保存しなければならないの

で４つしかない。

$$\begin{aligned} D_{div}^{(1PI)} &\leq -2 \quad \text{ゴーストタイプ} \\ D_{div}^{(1PI)} &\leq -1 \quad \text{K タイプ} \\ D_{div}^{(1PI)} &\leq -3 \quad \text{L タイプ} \\ D_{div}^{(1PI)} &\leq -1 \quad \text{M タイプ} \end{aligned} \tag{111}$$

上式からこれらのファインマン図は発散しない事が分かる。つまり以下の式を得る事が出来る。

$$\frac{\delta\Gamma_{\text{div}}^{(n)}}{\delta c^{\lambda}} = \frac{\delta\Gamma_{\text{div}}^{(n)}}{\delta K^{\mu\nu}} = \frac{\delta\Gamma_{\text{div}}^{(n)}}{\delta L_{\lambda}} = \frac{\delta\Gamma_{\text{div}}^{(n)}}{\delta M} = 0 \tag{112}$$

これらの結果を受け S-T 恒等式（102）は以下のようになる。

$$\int d^4x \left[\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta K^{\mu\nu}} \frac{\delta}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta M} \frac{\delta}{\delta\phi} \right] \Gamma_{\text{div}}^{(n)} = 0 \tag{113}$$

上記の式の意味する事は発散項はゲージ不変な $g^{\mu\nu}$ と ϕ から成る、せいぜい微分が 4 つまで含まれる関数である事を意味している。それが許される発散項は作用 (82) と宇宙項からなる形だけである。微分を３つ含むゲージ不変な項は LCS 項があるが、今考えている理論はパリティが保存しているためそのような項は許されない。

6　結論

量子重力理論の候補として本論文では一般相対性理論を修正する方向で検討した。具体的には高階微分項を加えることで、量子重力を考える際に問題点とされる繰り込み可能性を解決しようと試みた。４次元ではユニタリー性を破ってしまう事がすでに Stelle によって示されていた。しかし３次元ではユニタリー性と繰り込み可能性が同時に成り立つ可能性が残されていたため、本論文で考察した。

結論を述べると高階微分を含む重力理論は４次元以下で繰り込み可能である事が分かった。しかし残念なことに同時にユニタリー性を保つ事が出来ない事が判明した。ここまでが本論文の前半部分である。

後半部分では高階微分を含む重力理論の繰り込み可能性とユニタリー性の問題を解決するために、別のアプローチを試みた。それはリーマン理論で重力理論を記述するといく試みである。この試みの利点として、リーマン理論では内積の正定値性が常に成り立っているため、負のノルムのような状態が現れない点である。リーマン理論では"時間"がない問題があるが、向山と Uzan によって clock 場を導入する事で、"時間"が確かに現れる事が示された。

しかし高階微分を含む重力理論に新たに clock 場が加わったことで、繰り込み可能であるかは明白ではない。それは clock 場と重力の相互作用項に高階微分が含まれているためである。相互作用バーテックスに高階微分が含まれていると、次元勘定定理から発散がよりひどくなる事が分かっているからである。そこでリーマン理論で高階微分を含む重力理論の繰り込み可能性について考察した。結論を述べると、4 次元以下では繰り込み可能である事が分かった。

今後の課題としてはこの理論の繰り込み群を用いての研究を行うことである。リーマン理論では高エネルギー領域と低エネルギー領域で理論の振る舞いが変わることである。このような理論を考察するには繰り込み群の方法を用いる事が極めて有効であると思われる。実際、他の高階微分を含む重力理論のモデルで盛んに研究が行われている [17, 18, 19, 20, 21, 22] 。そしてこれらの研究は高階微分を含む重力理論が漸近的安全な理論である事を示した。

ここで漸近的安全に関して簡単に説明する。場の量子論において結合定数が、あるエネルギースケールの依存性に関する関数を β 関数と呼ぶ。β 関数が 0 になる結合定数の値を固定点といい、結合定数が 0 以外の固定点を非自明な固定点と呼ぶ。また固定点において β 関数の傾きが負になる場合を紫外固定点と呼ぶ。そして非自明な紫外固定点が存在すれば、その近傍で連続極限（簡単に言えばカットオフを無限大に取る事）を取る事が出来る。つまり固定点の近傍では場の量子論は任意のエネルギーをもった粒子について記述できるため繰り込み可能であると言える。このように非自明な紫外固定点を持つ事で非摂動的ではあるが繰り込み可能である事を漸近的安全な理論を呼ぶ。つまり非摂動的に繰り込み不可能でも、漸近的安全な理論であることを示せたら、その理論は繰り込み可能であると言える。

しかし残念なことに [21, 22] では NMG に関して、非自明な紫外固定点が存在しない事に言及している。つまり NMG は非摂動的な手段を用いても繰り込み不可能な理論であると言える。この結果から本論文の前半部分のような議論で繰り込み可能とユニタリー性の

両立を目指すのは困難であるともいえる。結局、高階微分を含む重力理論で繰り込み可能とユニタリー性の両立を目指すのならば、本論文の後半部分のように重力理論をリーマン理論で記述することが一番の近道かもしれない。

リーマン理論では clock 場が含まれているため、繰り込み群の方法を用いる研究は困難であると思われる。しかし繰り込み群の方法を用いて、低エネルギー領域でローレンツ計量で記述された clock 場と結合しているアインシュタイン重力とこの理論が一致する事を確かめる事が出来れば面白い結果となるだろう。

付録

A　計算の詳細

A.1　クリストッフェル記号等の定義

クリストッフェル記号、リーマンテンソル、リッチテンソル、リッチスカラーの定義は以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(\partial_\rho g_{\kappa\sigma} + \partial_\sigma g_{\kappa\rho} - \partial_\kappa g_{\rho\sigma}\right) \\
&R^{\lambda}{}_{\mu\rho\nu} \equiv \partial_\rho \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho} + \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho} \\
&R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} = R_{\nu\mu} \\
&R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{114}
$$

添え字上げ下げは計量 $g_{\mu\nu}$ で行う。

A.2　スピン演算子の性質

スピン演算子は以下の関係式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
P^{(i,a)}_{\mu\nu,\rho\sigma} P^{(j,b)}_{\rho\sigma,\lambda\tau} &= \delta^{ij}\delta^{ab} P^{(i,a)}_{\mu\nu,\lambda\tau} \\
P^{(i,ab)}_{\mu\nu,\rho\sigma} P^{(j,cd)}_{\rho\sigma,\lambda\tau} &= \delta^{ij}\delta^{bc} P^{(i,a)}_{\mu\nu,\lambda\tau} \\
P^{(i,a)}_{\mu\nu,\rho\sigma} P^{(j,bc)}_{\rho\sigma,\lambda\tau} &= \delta^{ij}\delta^{ab} P^{(i,ac)}_{\mu\nu,\lambda\tau} \\
P^{(i,ab)}_{\mu\nu,\rho\sigma} P^{(j,c)}_{\rho\sigma,\lambda\tau} &= \delta^{ij}\delta^{bc} P^{(i,ac)}_{\mu\nu,\lambda\tau}
\end{aligned}
\tag{115}
$$

A.3　リーマンテンソル等の線形化

クリストッフェル記号の線形化

$$
\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\sigma}(h) = \kappa \Gamma^{(1)\lambda}{}_{\rho\sigma}(h) + \kappa^2 \Gamma^{(2)\lambda}{}_{\rho\sigma}(h) + \mathcal{O}\left(\kappa^3\right) \tag{116}
$$

$$
\Gamma^{(1)\lambda}{}_{\rho\sigma}(h) \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_\rho h^{\lambda}{}_{\sigma} + \partial_\sigma h^{\lambda}{}_{\rho} - \partial^{\lambda} h_{\rho\sigma}\right) \tag{117}
$$

$$
\Gamma^{(2)\lambda}{}_{\rho\sigma}(h) \equiv -\frac{1}{2} h^{\lambda\kappa} \left(\partial_\rho h_{\kappa\sigma} + \partial_\sigma h_{\kappa\rho} - \partial_\kappa h_{\rho\sigma}\right) \tag{118}
$$

リーマンテンソルの線形化

$$R^{\alpha}_{\ \mu\beta\nu}(h) = \kappa R^{(1)\alpha}_{\qquad\mu\beta\nu} + \kappa^2 R^{(2)\alpha}_{\qquad\mu\beta\nu} + \mathcal{O}\left(\kappa^3\right) \tag{119}$$

$$R^{(1)\alpha}_{\qquad\mu\beta\nu}(h) \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_\beta\partial_\mu h^{\alpha}_{\ \nu} - \partial_\beta\partial^\alpha h_{\mu\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha h_{\mu\beta} - \partial_\nu\partial_\mu h^{\alpha}_{\ \beta}\right) \tag{120}$$

$$\begin{aligned} R^{(2)\alpha}_{\qquad\mu\beta\nu}(h) \equiv \frac{1}{4}\Big[&\left(\partial_\kappa h^{\alpha}_{\ \beta} + \partial_\beta h^{\alpha}_{\ \kappa} - \partial^\alpha h_{\kappa\beta}\right)\left(\partial_\mu h^{\kappa}_{\ \nu} + \partial_\nu h^{\kappa}_{\ \nu} - \partial^\kappa h_{\mu\nu}\right) \\ &- \left(\partial_\kappa h^{\alpha}_{\ \nu} + \partial_\nu h^{\alpha}_{\ \kappa} - \partial^\alpha h_{\kappa\nu}\right)\left(\partial_\mu h^{\kappa}_{\ \beta} + \partial_\nu h^{\kappa}_{\ \beta} - \partial^\kappa h_{\mu\beta}\right)\Big] \end{aligned} \tag{121}$$

リッチテンソルの線形化

$$R_{\mu\nu}(h) = \kappa R^{(1)}_{\ \mu\nu}(h) + \kappa^2 R^{(2)}_{\ \mu\nu}(h) + \mathcal{O}(\kappa^3) \tag{122}$$

$$R^{(1)}_{\ \mu\nu}(h) \equiv \frac{1}{2}\left[2\partial_\alpha\partial_{(\mu} h^{\alpha}_{\ \nu)} - \Box h_{\mu\nu} + \partial_\nu\partial_\mu h\right] \tag{123}$$

$$R^{(2)}_{\ \mu\nu}(h) \equiv \frac{1}{4}\left[\partial_\kappa h\left(2\partial_{(\mu} h^{\kappa}_{\ \nu)} - \partial^\alpha h_{\mu\nu}\right) - \left(2\partial_{(\kappa} h^{\alpha}_{\ \nu)} - \partial^\alpha h_{\kappa\nu}\right)\left(2\partial_{(\mu} h^{\kappa}_{\ \alpha)} - \partial^\kappa h_{\mu\alpha}\right)\right] \tag{124}$$

リッチスカラーの線形化

$$R(h) = \kappa R^{(1)}(h) + \kappa^2 R^{(2)}(h) + \mathcal{O}(\kappa^3) \tag{125}$$

$$R^{(1)}(h) \equiv \left(\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} - \Box h\right) \tag{126}$$

$$\begin{aligned} R^{(2)}(h) \equiv \Big[&-\frac{1}{2}h^{\epsilon\gamma}\left(\partial_\alpha\partial_\epsilon h^{\alpha}_{\ \gamma} - \Box h_{\epsilon\gamma} + \partial_\gamma\partial^\alpha h_{\epsilon\alpha} - \partial_c\partial_\epsilon h\right) \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\kappa h\partial^\beta h^{\kappa}_{\ \beta} - \frac{1}{4}\partial_\kappa h\partial^\kappa h - \frac{1}{2}\partial_\kappa h^{\alpha\beta}\partial_\alpha h^{\kappa}_{\ \beta} + \frac{1}{4}\partial_\kappa h^{\alpha\beta}\partial^\kappa h_{\alpha\beta}\Big] \end{aligned} \tag{127}$$

アインシュタインテンソルの線形化と作用の線形化に役立つ関係式

$$\begin{aligned} G^{(1)}_{\ \mu\nu}(h) &\equiv R^{(1)}_{\ \mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}(h) \\ &= \frac{1}{2}\left[2\partial_\alpha\partial_{(\mu} h^{\alpha}_{\ \nu)} - \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h + \eta_{\mu\nu}\left(\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} - \Box h\right)\right] \end{aligned} \tag{128}$$

$$\begin{aligned} G^{(1)}(h) \equiv \eta^{\mu\nu}G^{(1)}_{\ \mu\nu}(h) &= R^{(1)}(h) - \frac{3}{2}R^{(1)}(h) \\ &= -\frac{1}{2}R^{(1)}(h) \end{aligned} \tag{129}$$

$$R^{(1)}_{\ \mu\nu}(h)R^{(1)\mu\nu}(h) = G^{(1)}_{\ \mu\nu}(h)G^{(1)\mu\nu}(h) + \left[G^{(1)}(h)\right]^2 \tag{130}$$

A.4　３次元でのラグランジアンの 1+2 分解

３次元でのラグランジアンの 1+2 分解はそれぞれ以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{EH}^{(2)}(h) &= -\frac{\sigma}{2}\left[h_{00}G^{(1)00}(h) + 2h_{0i}G^{(1)0i}(h) + h_{ij}G^{(1)ij}(h)\right] \\
&= -\frac{\sigma}{2}\left[\phi\nabla^2 n + \psi\nabla^2\psi\right] \qquad (131)\\
\mathcal{L}_{G^2}^{(2)}(h) &= (4\alpha+\beta)\left[G^{(1)}(h)\right]^2 \quad , G^{(1)}(h) = -\frac{1}{2}\left[\Box\phi + \nabla^2 n\right] \\
&= (4\alpha+\beta)\left[\frac{1}{4}\Box\phi\Box\phi + \frac{1}{2}\nabla^2 n\Box\phi + \frac{1}{4}\nabla^2 n\nabla^2 n\right] \qquad (132)\\
\mathcal{L}_{G^2_{\mu\nu}}^{(2)}(h) &= \beta\left\{G^{(1)00}(h)G^{(1)}_{\ 00}(h) - 2\left[G^{(1)}_{\ 0i}(h)\right]^2 + G^{(1)ij}(h)G^{(1)}_{\ ij}(h)\right\} \\
&= \beta\left\{\frac{1}{4}\Box\phi\Box\phi + \frac{1}{4}\nabla^2 n\nabla^2 n - \frac{1}{2}\psi\nabla^2\Box\psi\right\} \qquad (133)\\
\mathcal{L}_{LCS}^{(2)}(h) &= \frac{1}{4\mu}\Big[\varepsilon^{0ij}\partial_i h^\rho_{\ 0}\left(\partial_\rho\partial_\sigma h^\sigma_{\ j} - \Box h_{\rho j}\right) + \varepsilon^{j0i}\partial_0 h^\rho_{\ j}\left(\partial_\rho\partial_\sigma h^\sigma_{\ i} - \Box h_{\rho i}\right) \\
&\qquad + \varepsilon^{ij0}\partial_j h^\rho_{\ i}\left(\partial_\rho\partial_\sigma h^\sigma_{\ 0} - \Box h_{\rho 0}\right)\Big] \\
&= \frac{1}{2\mu}\partial_j\psi_j\left(\nabla^2 n - \Box\phi\right) \qquad (134)
\end{aligned}
$$

上記の導出には以下の関係式を使った。

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{0ij}\partial_i h^\rho_{\ 0}\left(\partial_\rho\partial_\sigma h^\sigma_{\ j} - \Box h_{\rho j}\right) &= \varepsilon^{ij0}\partial_j h^\rho_{\ i}\left(\partial_\rho\partial_\sigma h^\sigma_{\ 0} - \Box h_{\rho 0}\right) \\
&= \partial_j\psi_j\left(\nabla^2 n - \Box\phi\right) \\
\varepsilon^{j0i}\partial_0 h^\rho_{\ j}\left(\partial_\rho\partial_\sigma h^\sigma_{\ i} - \Box h_{\rho i}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

A.5　Källen-Lehmnn スペクトル表示

プロパゲータが予め分かっている場合で、理論のユニタリー性（正定値性）を見るには Källen-Lehmnn スペクトル表示を使うと便利である。相互作用のある理論だと、相関関数を厳密に求めることはできない。しかしそれを相互作用のない関数を使って、厳密に表現する方法があり、それを Källen-Lehmnn スペクトル表示と呼ぶ。この事を検証するために、簡単な例として実スカラー場 Φ が４次の相互作用をしている場合について考える。

真空期待値は以下で与えられる。

$$\langle 0\,|\mathrm{T}\,(\Phi(\mathrm{x})\Phi(\mathrm{y}))|\,0\rangle = -i\int_0^\infty d\mu^2\rho(\mu^2)\Delta_F(x-y;\mu^2) \tag{135}$$

$$\rho(\mu^2) \equiv \sum_n 2\pi\delta(\mu^2-m_n^2)|\,\langle 0|\Phi(0)|n\rangle\,|^2 \tag{136}$$

ここで T は時間順序積、$\Delta_F(x-y;\mu^2)$ は質量 μ での位置表示のファインマンプロパゲータである。$|0\rangle$ は真空状態、$|n\rangle$ は任意の n 状態である。

このままだと少し不便なので、以下のような運動量空間の関数を導入する。

$$-i\Delta'(p) \equiv \int d^4xe^{-ip\cdot(x-y)}\,\langle 0\,|\mathrm{T}\,(\Phi(\mathrm{x})\Phi(\mathrm{y}))|\,0\rangle \tag{137}$$

運動量表示でのファインマンプロパゲータは以下のようになり、上記の式に代入することで Källen-Lehmnn スペクトル表示を得る事が出来る。

$$\int d^4xe^{-ip\cdot(x-y)}\Delta_F(x-y;\mu^2) = \frac{1}{p^2+\mu^2-i\epsilon} \tag{138}$$

以下の式が Källen-Lehmnn スペクトル表示と呼ばれる式である。

$$\Delta'(p) = \int_0^\infty \rho(\mu^2)\frac{d\mu^2}{p^2+\mu^2-i\epsilon} \tag{139}$$

式（136）から $\rho \geq 0$ である事が、理論の正定値性を保証する事が分かる。

次に高階微分を入れると何故正定値性を破るのかをみる。高階微分を含む運動量表示でのプロパゲータは以下のようになる (簡略化のために、$-i\epsilon$ は除いている)。

$$\begin{aligned} D(p) \approx& \frac{1}{p^2(p^2+m^2)} \\ \propto& \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+m^2} \end{aligned} \tag{140}$$

上記の式の 2 行目の 2 項目がいわゆるゴーストと呼ばれるもので、プロパゲータに負の符号が付いているため理論の正定値性を破っているのが分かる。

参考文献

[1] S. W. Hawking, Nature **248**, 30 (1974).

[2] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975) [Erratum-ibid. **46**, 206 (1976)].

[3] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Annales Poincare Phys. Theor. A **20**, 69 (1974).

[4] M. H. Goroff and A. Sagnotti, Phys. Lett. B **160**, 81 (1985).

[5] K. S. Stelle, "Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity," Phys. Rev. D **16** (1977) 953.

[6] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, "Three-Dimensional Massive Gauge Theories," Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 975.

[7] S. Deser and Z. Yang, "Is Topologically Massive Gravity Renormalizable?," Class. Quant. Grav. **7** (1990) 1603.

[8] E. A. Bergshoeff, O. Hohm and P. K. Townsend, "Massive Gravity in Three Dimensions," Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 201301 [arXiv:0901.1766 [hep-th]].

[9] I. Oda, "Renormalizability of Massive Gravity in Three Dimensions," JHEP **0905** (2009) 064 [arXiv:0904.2833 [hep-th]].

[10] E. A. Bergshoeff, O. Hohm and P. K. Townsend, "Gravitons in Flatland," arXiv:1007.4561 [hep-th].

[11] S. Deser, "Ghost-free, finite, fourth order D=3 (alas) gravity," Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 101302 [arXiv:0904.4473 [hep-th]].

[12] S. Mukohyama and J. P. Uzan, Phys. Rev. D **87**, no. 6, 065020 (2013) [arXiv:1301.1361 [hep-th]].

[13] S. Mukohyama, Phys. Rev. D **87**, no. 8, 085030 (2013) [arXiv:1303.1409 [hep-th]].

[14] N. Ohta, Class. Quant. Grav. **29**, 015002 (2012) [arXiv:1109.4458 [hep-th]].

[15] K. Muneyuki and N. Ohta, Phys. Rev. D **85**, 101501 (2012) [arXiv:1201.2058 [hep-th]].

[16] K. Muneyuki and N. Ohta, Phys. Lett. B **725**, 495 (2013) [arXiv:1306.6701 [hep-th]].

[17] I. G. Avramidi and A. O. Barvinsky, Phys. Lett. B **159**, 269 (1985).

[18] G. de Berredo-Peixoto and I. L. Shapiro, Phys. Rev. D **71**, 064005 (2005) [hep-th/0412249].

[19] A. Codello and R. Percacci, Phys. Rev. Lett. **97**, 221301 (2006) [hep-th/0607128].

[20] A. Codello, R. Percacci and C. Rahmede, Annals Phys. **324**, 414 (2009) [arXiv:0805.2909 [hep-th]].

[21] N. Ohta, Class. Quant. Grav. **29**, 205012 (2012) [arXiv:1205.0476 [hep-th]].

[22] N. Ohta and R. Percacci, Class. Quant. Grav. **31**, 015024 (2014) [arXiv:1308.3398 [hep-th]].

謝辞

　本論文を作成するに当たり、熱心なご指導いただいた太田信義教授に心からお礼を申し上げます。

博 士 学 位 論 文

欧 文 に よ る 内 容 梗 概

RENORMALIZABILITY AND UNITARITY OF HIGHER DERIVATIVE GRAVITY

近 畿 大 学 大 学 院

総合理工学研究科理学専攻

宗 行 賢 二

SUMMARY

RENORMALIZABILITY AND UNITARITY OF HIGHER DERIVATIVE GRAVITY

KENJI MUNEYUKI

It is one of the long standing problems in theoretical physics to construct quantum theory of gravity. It has been known for some time that gravity is renormalizable in four dimensions if one includes higher derivative terms. However, the unitarity of the theory, which is one the most important properties of any physical theory, is not preserved. So the theory has not been taken very seriously.

Recently a very interesting proposal has been made that the addition of such higher order terms to three-dimensional gravity can keep the theory unitary and possibly renormalizable if the coefficients are chosen appropriately. The theory is called new massive gravity.

It has been suggested that new massive gravity with higher order terms in the curvature may be renormalizable and thus a candidate for renormalizable quantum gravity. However we show that three-dimensional gravity that contains quadratic scalar curvature and Ricci tensor is renormalizable, but those theories with special relation between their coefficients including new massive gravity are not.

Thus the unitarity and the renormalizability are incompatible. So, we have tried to solve the complicated problem using a differnt method in the latter part of this paper.

The proposal has been made that the time may be an emergent notion. The idea starts with four-derivative theory of gravity coupled to a scalar field with shift symmetry with Euclidean signature. The quadratic terms of the scalar field also have four derivatives, so that its scaling dimension is zero. The low-energy effective theory is described by the Einstein theory together with the four-derivative scalar theory. It was then shown that this low-energy effective theory is equivalently described by a Lorentzian action. In this way it was suggested that the low-energy theory becomes Lorentzian but the theory at the short distance is described by a Riemannian (locally Euclidean) theory without the notion of time. If true, this may be a resolution of the ghost problem in the above renormalizable theory of gravity.

We consider that higher-derivative gravity theories coupled to a scalar field with shift symmetry may be an important candidate for a quantum gravity. In the latter part of this paper, we show that this class of gravity theories are renormalizable in $D = 3$ and 4 dimensions.

博 士 学 位 論 文

論 文 要 旨

高階微分を含む重力理論の繰り込み可能性とユニタリー性について

平成 27 年 2 月 2 日

近 畿 大 学 大 学 院

総合理工学研究科理学専攻

宗 行 賢 二

本論文では高階微分を含む重力理論の繰り込み可能性とユニタリー性について考察した。以下本論文の研究の目的と結果について述べる。

重力を記述する一般相対論が繰り込み可能ではない事は有名である。そのため多くの物理学者がこの問題に関して様々な研究を行ってきた。様々な研究があるが、その１つにStelle が提唱した重力理論に高階微分 (今の場合だと 4 階微分) を含めることにより、繰り込み可能になるという主張がある [1]。

一見、高階微分を含めることによりさらに発散がひどくなるように思える。しかし高階微分を重力理論に含めることにより、重力のプロパゲータが運動量 k_μ が十分大きい領域で $\frac{1}{k^4}$ のように振る舞い逆に理論の発散が少なくて済む事が分かっている。しかし重大な問題があり、高階微分を含めるとユニタリー性を破ってしまうことも分かっている [1]。

最近、Bergshoeff 達が式 (1) のような高階微分を含む３次元重力理論である特別な場合ではユニタリー性を保つ事を発見した。

$$S_{NMG} = \frac{1}{\kappa_3^2}\int d^3x\sqrt{-g}\left[-R + \frac{1}{m^2}\left(R^2 - \frac{3}{8}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right)\right] \tag{1}$$

ここで κ_3^2 は３次元の重力定数で、m は質量である。上記の作用を見てわかるように、高階微分を含んでいるにも拘らずユニタリー性を保っているため、繰り込み出来る可能性があった。研究の目的としては、３次元で高階微分を含む重力理論において、繰り込み可能とユニタリー性の保存の両方を満たす理論の構築が出来るかを検討した。

結果としては、３次元の高階微分を含む重力理論は繰り込み可能である。そして n ループでの発散する部分 $\Gamma_{\rm div}^{(n)}$ は以下の結果を得た [3]。

$$\Gamma_{\rm div}^{(n)} = \int d^3x\sqrt{-g}\,[a_n + b_n R] \tag{2}$$

ここで a_n、b_n は n ループでの繰り込みの係数である。３次元での場合は、発散項を見てわかるように曲率の２乗のような高階微分を含む項が量子補正を受けない事が分かった。

ただしユニタリー性を保つモデルには繰り込みに関して問題があることも分かった。ユニタリー性を保つモデルの場合重力のプロパゲータは運動量の十分大きい領域では $\frac{1}{k^4}$ のように振る舞うのではなく、$\frac{1}{k^2}$ のように振る舞う事が分かった。プロパゲータが $\frac{1}{k^2}$ のように振る舞うと、発散がバーテックスが増えれば増えるほど大きくなり, そのような発散を打ち消すための相殺項は、４階微分以上のさらに高次の微分を含んだ項が無限に必要である結果を得た [3]。ここまでが本論文の前半部分の内容である。

本論文の後半部分は、繰り込み可能とユニタリー性の問題を解決するためにリーマン理論で重力理論を記述するという試みについて考察した。重力理論では時空をローレンツ多様体であると考える。ローレンツ多様体では"時間"方向の符号を負に取っているため、内積が正になるとは限らない。その結果、高階微分を含む重力理論では"時間"の高階微分があることで負のノルムが現れ、ユニタリー性を破ってしまう問題がある。

リーマン理論では時空をリーマン多様体であると考える。リーマン多様体では、計量の符号はすべて正に取るため、内積が必ず正になる。つまり負のノルムが現れる事がない為、ユニタリー性の問題を回避できる。

リーマン理論で"時間"がない問題は向山と Uzan が clock 場 ϕ を導入する事で、リーマン多様体 $\mathcal{M}$ のある領域 $\mathcal{M}_0$ で"時間"が現れる事を示した [4]。さらに向山は以下のような clock 場と結合している高階微分を含む重力理論が低エネルギーで、つまり私達が住む世界 $\mathcal{M}_0$ で、ローレンツ計量で記述された重力理論と一致する事を示した [5]。

$$\begin{aligned}S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[&\frac{1}{\kappa_4^2}\Big(R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}^2 + \gamma R_{\mu\nu\rho\lambda}^2\Big) + Z_0(\nabla_\mu\phi)^2 + Z_1 R(\nabla_\mu\phi)^2 \\ &+ Z_2 R^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + Z_3(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi)^2 + Z_4(\Box\phi)^2 + Z_5(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\Big] \qquad (3)\end{aligned}$$

上記の作用は高階微分を含む clock 場と結合しているため繰り込み可能であるか断定が出来なかった。なぜならば相互作用項に高階微分が含まれていれば、一般に理論の発散はよりひどくなるためである。そのため本論文では上記の作用を D 次元に拡張した上で、繰り込み可能であるか考察した。

結果としては４次元以下では繰り込み可能である事が分かった。特に、３次元の場合では以下のように高階微分を含む項は量子補正を受けない事が分かった [6]。

$$\Gamma_{\mathrm{div}}^{(n)} = \int d^3x\sqrt{-g}\left[a_n + b_n R + c_n(\nabla_\mu\phi)^2\right] \qquad (4)$$

ここで a_n、b_n と c_n は n ループでの繰り込みの係数である。

参考文献

[1] K. S. Stelle, “Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity,” Phys. Rev. D **16** (1977) 953.

[2] E. A. Bergshoeff, O. Hohm and P. K. Townsend, “Massive Gravity in Three Dimensions,” Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 201301.

[3] K. Muneyuki and N. Ohta, Phys. Rev. D **85**, 101501 (2012).

[4] S. Mukohyama and J. P. Uzan, Phys. Rev. D **87**, no. 6, 065020 (2013).

[5] S. Mukohyama, Phys. Rev. D **87**, no. 8, 085030 (2013).

[6] K. Muneyuki and N. Ohta, Phys. Lett. B **725**, 495 (2013).

博 士 学 位 論 文

論 文 目 録

近 畿 大 学 大 学 院

総合理工学研究科理学専攻

宗 行 賢 二

主論文

[1] K. Muneyuki and N. Ohta, ``Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity Coupled to a Scalar with Shift Symmetry," Phys. Lett. B **725**, 495 (2013).

[2] K. Muneyuki and N. Ohta, ``Unitarity versus Renormalizability of Higher Derivative Gravity in 3D," Phys. Rev. D **85**, 101501 (2012).

副論文（参考論文）

なし