

学位論文審査結果の報告書

氏 名

高橋 甫宗

生 年 月 日

昭和・平成 元年 9月 10日

本 籍 (国籍)

大阪府

学位の種類

博 士 (理 学)

学位記番号

理 第 84 号

学位授与の条件
(博士の学位)

学位規程第5条該当

論 文 題 目

The confluent hypergeometric function and WKB solutions

(合流型超幾何函数とWKB解)

審 査 委 員

(主 査)

高崎 金久



(副主査)

池田 徹



(副主査)

中村 弥生



(副 査)

青木 貴史



指 導 教 員



Kummer の合流型超幾何微分方程式に大きなパラメータを導入した微分方程式が本論文では考察されている。大きなパラメータを適切に導入することにより、WKB 解と呼ばれる形式解が構成できる。この形式解からボレル総和法により解析的な解の基本系を得ることができる。一方、Kummer の方程式には標準的な解として合流型超幾何関数がある。そこで自然な問題として合流超幾何関数と WKB 解のボレル和との関係がどうなっているかという疑問が生じる。本論文ではこの疑問に対する一つの答を与えている。

Introduction に続いて Section 1 では大きなパラメータを持つ Kummer の合流型超幾何微分方程式（以下 Kummer 方程式と略記）が定式化される。Kummer 方程式

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + (c - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0$$

において大きなパラメータ η を

$$a = \alpha\eta + \alpha_0, \quad c = \gamma\eta + \gamma_0, \quad z = x\eta$$

と置いて導入する。さらに 1 階項を消去する未知関数の変換を行うと方程式は

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 R\right) \psi = 0$$

の形となる。ここで $R = R_0 + \eta^{-1} R_1 + \eta^{-2} R_2$ は

$$R_0 = \frac{x^2 + 2(2\alpha - \gamma)x + \gamma^2}{4x^2}, \quad R_1 = \frac{(2\alpha_0 - \gamma_0)x + \gamma(\gamma_0 - 1)}{2x^2}, \quad R_2 = \frac{\gamma_0(\gamma_0 - 2)}{4x^2}$$

となる。本論文ではこの方程式を考察している。Section 3 では Voros 係数が論じられる。まず Kummer の方程式の WKB 解と呼ばれる形式解を考える。これはこの方程式の形式解で

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{T_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int T_{\text{odd}} dx\right)$$

の形を持つものである。ここで T_{odd} は方程式に付随する Riccati 方程式 $T_x + T^2 = \eta^2 R$ の η^{-1} についての形式的べき級数解の $\sqrt{R_0}$ に関する奇数次部分である。この形式解は、パラメータに関する一般的な条件の下に Stokes 曲線で囲まれた領域（Stokes 領域という）において Borel 総和可能となることが知られている。 C_0, C_2 をそれぞれ特異点 $b_0 = 0, b_{\infty} = \infty$ から出発し、単純変わり点（ R_0 の単純零点）を回り、出発点に戻る周回路とする。 $T_{\text{odd}} dx$ は、各特異点において、極を持ち、主要部は $T_{\text{odd}, \leq 0} dx$ と一致する。ここで $T_{\text{odd}, \leq 0}$ は T_{odd} の η に関する冪が負または 0 の部分を表す。従って次の積分は形式的べき級数として意味を持ち、変わり点の選び方に依らず定まる：

$$W_j = \frac{1}{2} \int_{C_j} (T_{\text{odd}} - T_{\text{odd}, \leq 0}) dx \quad (j = 0, 2)$$

これを特異点 b_j の Voros 係数と呼ぶ。本論文の第 1 結果は、Voros 係数の具体形を与えたことにある。例えば原点 $b_0 = 0$ の Voros 係数 W_0 は

$$W_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \eta^{1-n}}{n(n-1)} \left(\frac{B_n(\alpha_0)}{\alpha^{n-1}} + \frac{B_n(\gamma_0 - \alpha_0)}{(\gamma - \alpha)^{n-1}} - \frac{B_n(\gamma_0) + B_n(\gamma_0 - 1)}{\gamma^{n-1}} \right)$$

で与えられる (Theorem 3.2). ここに $B_n(x)$ は n 次 Bernoulli 多項式である. $b_2 = \infty$ の Voros 係数も同様に与えられている. 証明の方法は Voros 係数が満たすパラメータに関する差分方程式を導出し, 適当な条件を付加すると Voros 係数がそれらの方程式により特徴付けられることに着目し, その方程式系を形式的無限階作用素を用いて解くというものである.

Section 4 では前節で求められた Voros 係数の Borel 和を求めている. Borel 和はパラメータ空間の幾つかの領域に分けて計算される. 考えている方程式の Stokes 曲線のタイプにより領域が決まる. これらの領域を明示するために, まず Stokes 曲線のグラフ論的な分類を与えている (Theorem 4.1). Stokes 曲線の形状は 3 通りあり, それらに対応する領域が求められている. そして, 各領域ごとに Voros 係数の Borel 和を計算し, 具体形を Gamma 関数を用いて表す式を与えている (Theorem 4.2, Theorem 4.4). 例えば $0 < \operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} \gamma$ のとき W_0 は Borel 総和可能となり, その Borel 和は

$$\frac{1}{2} \log \frac{\Gamma(\gamma_0 + \gamma\eta)\Gamma(\gamma_0 - 1 + \gamma\eta)\alpha^{\alpha_0 + \alpha\eta - \frac{1}{2}}(\gamma - \alpha)^{\gamma_0 - \alpha_0 + (\gamma - \alpha)\eta - \frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha_0 + \alpha\eta)\Gamma(\gamma_0 - \alpha_0 + (\gamma - \alpha)\eta)\gamma^{2(\gamma_0 + \gamma\eta - 1)}\eta^{\gamma_0 + \gamma\eta - 1}} + \frac{\gamma\eta}{2}$$

となる.

Section 5 では合流超型超幾何関数と WKB 解の Borel 和の関係が考察される. Theorem 5.1 および Theorem 5.2 が本論文において最も重要な結果である. 例えば $0 < \operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} \gamma$ かつ $\operatorname{Im}(\gamma - \alpha) < 0$ のとき

$${}_1F_1(\alpha_0 + \alpha\eta, \gamma_0 + \gamma\eta; \eta x) = \frac{\Gamma(\gamma_0 + \gamma\eta)e^{-\frac{\pi i}{2}(\gamma_0 - \alpha_0 + (\gamma - \alpha)\eta - \frac{1}{2})}}{\sqrt{2}\Gamma(\alpha_0 + \alpha\eta)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\gamma_0 - \alpha_0 + (\gamma - \alpha)\eta)^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma\eta - 1)}} x^{-\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma\eta)} e^{\frac{\eta x}{2}} \Psi_+^1$$

となる. ここで左辺は Kummer の合流型超幾何関数, Ψ_+^1 は WKB 解 ψ_+ の Borel 和である. 導出の方針は, まず原点で正規化された WKB 解の Borel 和と合流型超幾何関数の関係を求め, 次に Voros 係数を利用して変わり点で規格化された WKB 解の Borel 和と対応付けるというものである. $\operatorname{Re} \gamma > 0$ の場合には Ψ_+^1 単項で対応が与えられるが, $\operatorname{Re} \gamma < 0$ の場合は ψ_{\pm} 両方の Borel 和が必要となる. これに関しては Theorem 5.2 で議論されている. この場合には原点で分岐する解析的解が劣勢 WKB 解と対応するため, 正則解である合流型超幾何関数は劣勢解単独の Borel 和では表し得ない. そこで, 本論文では完全 WKB 解析における接続公式を活用し, 無限遠での解の基本形で適当なものと対応付けを行うことにより関係式を導出している.

Section 6 では前節までに得られた結果からパラメータの特殊化あるいは合流操作により, Whittaker 方程式に対する Voros 係数に関する Koike-Takei の結果や Weber 方程式に対する Takei の結果が得られること, さらに大きなパラメータの入れ方を一般化した結果が得られることを示している. また, Bessel 方程式についても Voros 係数の具体型を与えている.

本論文では Kummer の合流型超幾何微分方程式の係数に 1 次式の形で大きなパラメータ η を導入し、1 階項を消去して得られる Schrödinger 型微分方程式に対して完全 WKB 解析による詳細な考察を行っている。 η は Planck 定数の逆数とみなせるので、 η が無限に大きくなる極限は量子力学の準古典極限に相当する。WKB 法はそのような準古典極限における近似解法として長年利用されてきたが、1980 年代に近似なしの解析を行う完全 WKB 解析の試みが始まり、今日に至るまで研究が続いている。

完全 WKB 解析では、準古典展開のすべての次数の寄与を取り入れた WKB 解を構成し、正規化の仕方が異なる WKB 解の間の接続関係を Voros 係数と呼ばれる量で記述する。WKB 解と Voros 係数はいずれも Planck 定数に関して収束半径が 0 の発散級数であるが、完全 WKB 解析ではこれらに Borel 総和法を適用して Planck 定数の解析関数として再定義を行う。Watson の補題によって、もとの発散級数はこの解析関数の漸近展開とみなすことができる。実際の解析においては、方程式が定義された複素平面の上で、変わり点を出発するすべての Stokes 曲線の配置を求める必要がある。WKB 解の Borel 総和は Stokes 曲線で区切られた Stokes 領域ごとに行われる。その際に WKB 解の正規化の仕方も選ばれる。こうして Stokes 領域ごとに解析的に意味づけられた一連の WKB 解が得られる。それらの間の 1 次関係である接続関係は Borel 総和された Voros 係数によって記述される。Stokes 領域において Borel 総和された WKB 解はもとの形式的級数としての WKB 解を漸近展開にもつが、隣接する Stokes 領域の間の WKB 解の接続関係を用いれば、Stokes 曲線を越えたときの漸近展開の変化の様子もわかる。これによって Schrödinger 型方程式の固有値問題の解析なども可能になる。このように、Borel 総和法に基づいて伝統的な WKB 法を厳密解法に発展させたのが完全 WKB 解析である。

本論文で考察する Schrödinger 型方程式は Whittaker 方程式であり、昇降作用素をもつ。論文の前半ではこの昇降作用素を巧妙に利用して Voros 係数の形式的級数としての具体的な形を決定し、その Borel 総和も計算している。この結果に基づいて、後半では Kummer 方程式の標準的な合流型超幾何関数解と Schrödinger 型方程式の WKB 解から得られる解の間の 1 次関係を求めている。これらの考察から得られた主要な成果は以下の 4 つに要約できる。

第一に、Whittaker 方程式の Voros 係数を形式的級数として具体的に求めている。方程式の特殊性を利用して Voros 係数を明示的に決定する問題に関してはいくつかの先行研究があるが、それらは Whittaker 方程式が退化して大きなパラメータ以外のパラメータを 1 個だけもつ場合を扱っている。本研究は一般的な場合を扱う初めての試みである。ここでは方程式に 2 個のパラメータ α, γ が現れる。このように複数のパラメータが現れるため、先行研究の手法は適用できず、新たな手法が必要になる。本研究では昇降作用素を用いて Voros 係数が α, γ に関して満たす差分方程式を導き、Bernoulli 多項式を用いてその解を具体的に構成している。この方法は Whittaker 方程式に限らず様々な場合に応用できる可能性をもつ。

第二に、Bernoulli 多項式による Voros 係数の具体的表示から Borel 和を計算し、Borel 総和可能性を直接的に証明している。この計算は複素平面上の Stokes 曲線全体の形状に依存するので、計算に先立って Stokes 曲線の形状の分類を行っている。この分類自体が重要な結果であり、論文では 3 通りの形状が現れることを明らかにしている。さらに、 (α, γ) がなす複素 2 次元のパラメータ空間をこの分類に基づいていくつかの領域に分けて、各領域ごとに Voros 係数の Borel 和を求めている。領域の境界は Stokes 曲線の形状が退化して Borel 総和可能性が成立しない場合に相当す

る。Borel 和はこれらのパラメータ領域ごとに異なる形をとるが、それらはいずれもガンマ函数を用いて明示的に書き下され、WKB 解の接続関係が具体的に解析できるものになっている。このような Borel 和の計算は先行研究でも行われているが、本研究では複数のパラメータが現れるため、既存の方法を改良した新たな手法を開発している。この手法も様々な場合への応用が期待される。

第三に、Kummer 方程式の合流型超幾何函数解と前述の WKB 解析から得られる解の間の 1 次関係を決定している。Kummer 方程式は複素平面の原点と無限遠点の両方に特異点をもつ。それらに付随していくつかの合流型超幾何函数解がある。他方、Schrödinger 型方程式に対しては、正規化の仕方を変えた WKB 解がいくつか構成できる。1 階項を消去する手順を逆にたどれば、これらの WKB 解の Borel 和からも Kummer 方程式の解が得られる。本論文ではこれらの解の間の 1 次関係を具体的に求めている。前述のパラメータ空間の領域分けや Voros 係数の具体的表示はこの考察の中で決定的な役割を果たす。

方程式が 2 階であるから、各合流型超幾何函数が 2 個の独立な WKB 解の 1 次結合で表されることは当然であるが、その係数を明示的に書き下すことは容易ではない。論文では合流超幾何函数と WKB 解の原点や無限遠点での振る舞いを調べたり、WKB 解の接続公式を利用して、この 1 次結合の係数を決めている。WKB 解の振る舞いは Stokes 曲線との位置関係によって変わり、WKB 解の接続関係も Stokes 曲線全体の形状に依存するので、この解析は前述のパラメータ空間の領域ごとに分けて行う必要がある。このような複雑な解析を遂行することによって、本研究はどのパラメータ領域においても合流型超幾何函数を WKB 解の 1 次結合として明示的に書き下すことに成功している。特に、パラメータ領域の違いによって、合流型超幾何函数が 1 個の WKB 解の定数倍で表される場合と、2 個の WKB 解が必要になる場合があることを見出している。

第四に、方程式のパラメータの特殊化や特異点の合流操作によって、他の型の方程式における Voros 係数も導き出せることを示している。このようにして扱える方程式には、先行研究が対象にした退化型 Whittaker 方程式や Weber 型方程式に加えて、Bessel 方程式などもある。こうして得られた Voros 係数の表示式によって、様々な方程式の統一的な解析が可能になる。

合流型超幾何函数はガウスの超幾何函数と並んで基本的な特殊函数であり、その漸近的性質を解明することは理論と応用の両面できわめて重要な問題である。Borel 総和された WKB 解は Stokes 領域における漸近的性質がわかっているので、本研究で得られた一連の公式から合流型超幾何函数の漸近展開を導くことができる。合流型超幾何函数の漸近展開は長年にわたって様々な方法で研究されてきたが、本研究によってそれらを統一的に理解することができると期待される。さらに、既存の研究では大きいパラメータを実数値に限定することが多いが、本研究の結果はの場合に限定されず、Stokes 曲線の形状が退化しないすべての場合に適用できる。これによって、大きいパラメータの偏角を変えることによって起こる Stokes 現象の解析も可能になり、新たな研究の発展につながることを期待される。

以上のように、本論文は新たな知見を多数含み、その学術的意義は大きく、博士（理学）の学位論文に相応しいものと認められる。