

設計点探索法の研究

奥田 昇也*

A study of design points search method

Shoya OKUDA

This study describes an efficient application of Rackwitz Fiessler algorithm to search out all of design points, utilized in the importance sampling simulation to estimate structural failure probabilities. Specify several initial points to execute Rackwitz Fiessler algorithm in respective quadrants of the basic random variables space and all of possible design points are determined. Numerical example to estimate the failure probability of structural system with nonlinear limit state function by the multimodal importance sampling simulation utilizing all of design points determined by the proposed method is presented to illustrate the proposed method contribute to give accurate estimation effectively.

Key Words: Rackwitz Fiessler algorithm, Importance Sampling Simulation, Design Point, Structural reliability.

1. 緒 言

本研究は、重点サンプリング・シミュレーションに基づく構造破損確率の推定に必要な設計点の効率的探索法を取り扱う。限界状態関数が非線形の場合、設計点座標は、Rackwitz Fiessler 法¹⁻²⁾(以下で RF 法という)に基づいて探索・決定されるが、設計点探索を開始する RF 法の初期点を無作為に設定すると、限界状態関数によっては、有効な設計点座標に収束しない場合が生じる。本研究では、標準直角座標系で限界状態関数を構成する基本確率変数空間のすべての象限において、RF 法による設計点探索を開始する初期点を設定して、構造破損確率推定に必要なすべての設計点座標を遺漏なく探索・決定する方法を提案する。

まず、第 1 象限内で、任意に指定する点(以下で、指定点という)を定め、この指定点を平均値、標準偏差を 1 とするサンプル生成関数を構築して、サンプル点を複数個生成して、原点から各サンプル点を通る直線の限界状態曲面との交点座標を求め、これらを RF 法の初期点として設計点探索を実行する。

次に、第 1 象限で生成されたサンプル点の座標を、象限間の相対的座標位置関係を与える関係式³⁾を用いて変換して第 1 象限以外の象限ごとに対応する座標を求め、これを各象限の擬似的サンプル点の座標として決定する。原点からサンプル点および各擬似的サンプル点を通る直線の限界状態曲面との交点座標を各象限の RF 法の初期点とする。このように、全象限の限界状態曲面上に RF 法の初期点を設定して設計点探索を実行し、可能性のある設計点座標をすべての象限内で探索・決定する。

数値計算例として、数多くの象限を有する 9 変数・非線形限界状態関数で記述される構造システムの構造破損確率を推定する多峰性重点サンプリング・シミュレーション法の結果を与えて、提案手法の有効性を示す。

2. 構造破損確率⁴⁾

構造システムの状態を表す限界状態関数を記述する基本確率変数 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ は、標準直角座標系の k 次元正規確率変数であり、時間に依存しないものとする。構造破損確率 P_f は、次式で与えられる。

$$P_f = \int_{all \mathbf{u}} I_{D_f}(\mathbf{u}) f_U(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = E_{f_U} [I_{D_f}(\mathbf{u})] \quad (1)$$

ここで、 $f_U(\mathbf{u})$ は、基本確率変数 \mathbf{u} の標準正規結合確率密度関数であり、 $E_{f_U}[\cdot]$ は、 $[\cdot]$ の $f_U(\mathbf{u})$ に関する期待値を表す。 $I_{D_f}(\mathbf{u})$ は、構造システムの状態を判別する指標関数であり、システムが破損状態にあれば、 $I_{D_f}(\mathbf{u})=1$ 、安全状態にあれば、 $I_{D_f}(\mathbf{u})=0$ となる。

原始的モンテカルロ・シミュレーションにより構造破損確率 P_f を推定する場合、構造破損確率の推定量 \hat{P}_f は、 $f_U(\mathbf{u})$ に従う N 個のサンプル $\mathbf{u}^{(i)}$, ($i=1, 2, \dots, N$) を生成して、次式によって与えられる。

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_f^{(i)} \quad (2)$$

$$P_f^{(i)} = I_{D_f}[\mathbf{u}^{(i)}] \quad (3)$$

構造破損確率の推定量の分散 $Var(\hat{P}_f)$ およびその変動係数 Cov は、次式によって与えられる。

$$Var(\hat{P}_f) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (P_f^{(i)} - \hat{P}_f)^2 \quad (4)$$

*近畿大学工業高等専門学校
総合システム工学科 機械システムコース

$$Cov = \frac{Var(\hat{P}_f)}{\hat{P}_f} \quad (5)$$

3. 重点サンプリング法に基づく構造破損確率の推定⁵⁻⁶⁾

まず、単一破損モードをもつ構造システム場合の構造破損確率推定問題を考える。

重点サンプリング確率密度関数 $h_U(u)$ は、限界状態曲面上の設計点に中心をもつように構築される。これに基づいて変数 U のサンプルを生成することを想定すると、構造破損確率 P_f は、次のように定式化される。

$$P_f = \int_{all\ u} I_{D_f}[u] \frac{f_U(u)}{h_U(u)} h_U(u) du = E_{h_u} \left[I_{D_f} \left[u \right] \frac{f_U(u)}{h_U(u)} \right] \quad (6)$$

ここで、 $E_{h_U}[\cdot]$ は、 $[\cdot]$ の $h_U(u)$ に関する期待値を表す。重点サンプリング・シミュレーションによる構造破損確率の推定量とその変動係数は、次式を用いて、式(2)、(4)、式(5)によって得られる。

$$P_f^{(i)} = I_{D_f} \left[u^{(i)} \right] \frac{f_U(u^{(i)})}{h_U(u^{(i)})} \quad (7)$$

次に、 m 個の破損モードの限界状態関数をもつ構造システムの構造破損確率推定問題を考える。まず、破損モード l 、 $l = (1, 2, \dots, m)$ の限界状態曲面上の設計点に中心をもつ重点サンプリング確率密度関数 $h_{U_{\beta_l}}(\cdot)$ を構築し、これを用いて、多峰性重点サンプリング確率密度関数を次のように構築する⁶⁾。

$$h_U(u^{(i)}) = \sum_{l=1}^m w_l \times h_{U_{\beta_l}}(u^{(i)}) \quad (8)$$

ここで、 w_l は、各破損モードの重要度⁶⁾であり、次式で定義される。

$$w_l = \frac{\Phi(-\beta_l)}{\sum_{l=1}^m \{\Phi(-\beta_l)\}} \quad (9)$$

ここで、 $\Phi(\cdot)$ は、標準正規確率分布関数である。

サンプル $u^{(i)}$ の生成に際しては、各破損モードの重要度に応じて、一様乱数により選択される破損モード l 、 $l = (1, 2, \dots, m)$ を決定し、選択された破損モード l の重点サンプリング確率密度関数 $h_{U_{\beta_l}}(\cdot)$ からサンプル生成する。そして式(7)と式(2)、式(4)、式(5)により構造破損確率の推定量とその変動係数を決定する。

4. 指定された座標点の象限間の相対的位置関係と RF 法の初期点の決定法

標準直角座標系の k 次元基本確率変数の空間は、 2^k 個の象限で構成される。

まず、第 1 象限内でサンプルを生成し、そのサンプル

点の座標を $u^{1(i)} = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_{k-1}^{(i)}, u_k^{(i)})^T$ と表す。このサンプル点の座標に対応する第 q 番目の象限内の点の座標を $u^{q(i)} = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_{k-1}^{(i)}, u_k^{(i)})^q$ 、 $(q = 2, 3, \dots, 2^k)$ と表すと、第 1 象限の $u^{1(i)}$ とこれに対応する他の象限の $u^{q(i)}$ との相対的座標位置関係は、次式で与えられる³⁾。

$$u^{q(i)} = u^{1(i)} \begin{bmatrix} (-1)^{\text{roundup}\left(\frac{2^0+q}{2^0}\right)}, (-1)^{\text{roundup}\left(\frac{2^1+q}{2^1}\right)} \\ \vdots, \dots, (-1)^{\text{roundup}\left(\frac{2^{k-2}+q}{2^{k-2}}\right)}, (-1)^{\text{roundup}\left(\frac{2^{k-1}+q}{2^{k-1}}\right)} \end{bmatrix}^T, \quad (q = 2, 3, \dots, 2^k) \quad (10)$$

ここで、 $[\dots]^T$ は、象限間の相対的座標位置関係を表す係数列ベクトルである。 $\text{roundup}(\cdot)$ は、切り上げ関数で、 (\cdot) の小数点以下を切り上げて、整数とする命令であり、プログラム言語 Fortran では、 $\text{ceiling}()$ で表されている。

提案手法では、第 1 象限において N_k 個のサンプルを生成し、象限間の相対的座標位置関係を規定する式(10)を用いて、第 1 象限のサンプル座標点に対応する各象限における座標点をそれぞれ決定して、これらを擬似的サンプル点として、各象限内で、あたかもサンプリングを行ったように取扱い、第 1 象限以外の他の象限内のサンプリングを省略して効率化を図るのである。

第 1 象限における N_k 個のサンプル $u^{1(i)} = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_{k-1}^{(i)}, u_k^{(i)})^T$ 、 $(i = 1, 2, \dots, N_k)$ は、標準正規確率密度関数の中心点を $(1, 1, 1, \dots, 1)^T$ 、標準偏差を 1 としたサンプル生成関数から生成される。原点から $u^{1(i)}$ を通る直線の限界状態曲面との交点座標を決定する。この際、原点からサンプル点を通して限界状態曲面との交点までの距離の最大値を 10 と仮定し、この間で、「2 分法」によって、交点を決定する。距離が最大値 10 を超えて、交点得られない場合は、このサンプル点を除外して次のサンプル生成を行い、この操作を N_k 回繰り返す。この操作で得られた限界状態曲面との交点座標の各点を初期点として第 1 象限における RF 法による設計点探索を行なう。この手順を、 2^k 個の全象限について、繰り返して設計点探索を実行する。

基本確率変数が、2 変数($k=2$)で構成される限界状態関数が 2 個、すなわち 2 破損モード構造システムの場合を、図 1 に示す。2 次元空間では、 $2^k=4$ 個の象限 [I]、[II]、[III]、[IV] があり、第 [I] 象限内で $N_k=3$ 個のサンプル (黒丸で表示) を生成し、象限間の相対的座標位置関係式(10)を適用して、これらのサンプル点に対応する [II]、[III]、[IV] 象限内の擬似的サンプル点 (白丸で表示) を、決定する。『原点から第 [I] 象限のサンプル点および各象限の擬

似的サンプル点を通る直線の、限界状態曲面との交点を初期点（2重丸で表示）として、RF法による設計点探索を実行する。』これが、提案手法の趣旨である。

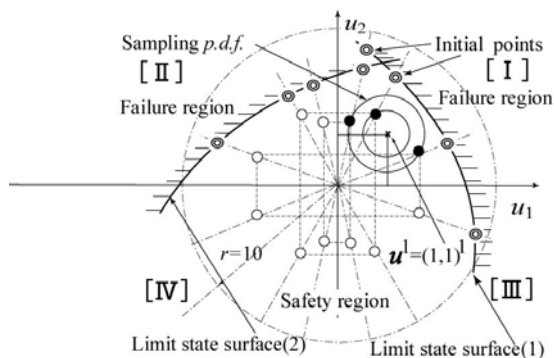


Fig. 1 Initial points of RF algorithm determined from sample points in the 1st quadrant space and quasi-sample points determined in the other quadrant space

以上、設計点を探索するRF法の初期点を全象限に設定する手順を以下に示す。

- Step 1: 第1象限内の指定点座標 $(1, 1, 1, \dots, 1)^T$ を平均値点とし、標準偏差を1とする標準正規確率密度関数のサンプル生成関数から生成された N_k 個のサンプル点座標を、 $\mathbf{u}^{1(i)}, (i=1, 2, \dots, N_k)$ とする。
- Step 2: 原点からサンプル点 $\mathbf{u}^{1(i)}, (i=1, 2, \dots, N_k)$ を通る直線の限界状態曲面との交点座標を決定し、第1象限における設計点を探索するRF法の初期点とする。
- Step 3: サンプル点 $\mathbf{u}^{1(i)}, (i=1, 2, \dots, N_k)$ に対応する擬似的サンプル点 $\mathbf{u}^{q(i)}, (i=1, 2, \dots, N_k)$ 、 $(q=2, 3, \dots, 2^k)$ を、 2^k 個の象限に対して、式(10)によって求め、原点から $\mathbf{u}^{q(i)}, (i=1, 2, \dots, N_k)$ 、 $(q=2, 3, \dots, 2^k)$ を通る直線の限界状態曲面との交点座標を決定し、第 q 番目の象限の設計点を探索するRF法の初期点とする。

5. 数値計算例

数値計算例として、曲げモーメントが作用する鉄筋コンクリート単鉄筋長方形はり⁷⁾の構造破損確率推定を、設計点を利用した重点サンプリング・シミュレーションによって推定する問題を考える。この構造システムの限界状態関数は、式(11)で与えられる9変数の非線形関数であり、各基本確率変数は、 x_1 : 鉄筋の断面積、 x_2 : 鉄筋の降伏点強度、 x_3 : 有効高さ、 x_4 : 断面の幅、 x_5 : コンクリートの円柱供試体の強度、 x_6 : 強度算定修正係数、 x_7 : 死荷重曲げモーメント、 x_8 : 活荷重曲げモーメント、 x_9 : 曲げモーメント算定修正係数であり、互いに独立で、時間に依存しない正規確率変数とする。各基本確率変数の統計データを表1に示す。

$$g(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \left(x_3 - \frac{x_1 x_2}{1.7 x_4 x_5} \right) x_6 - (x_7 + x_8) x_9 \quad (11)$$

Table 1 Statistical data

Variable	Mean value	Standard deviation
x_1	75.49	75.49×0.03
x_2	3,300.0	$3,300.0 \times 0.04$
x_3	84.92	84.92×0.05
x_4	100.0	100.0×0.05
x_5	288.0	288.0×0.20
x_6	1.0	1.0×0.1
x_7	6,061,000.0	$6,061,000.0 \times 0.05$
x_8	2,564,000.0	$2,564,000.0 \times 0.35$
x_9	1.0	1.0×0.1

この限界状態関数について、RF法による設計点探索を行なう。

i) 基本確率変数空間は、 $2^k = 2^9 = 512$ 個の象限によって、構成されている。4.で与えた提案手法によって512個の全象限で決定した初期点からRF法を実行し、設計点を探索・決定した。提案手法におけるサンプル生成関数から生成されるサンプル数は、 $N_k = 5$ とした。その結果、表2に示すように2個の設計点座標が決定され、2個の信頼性指標 $\beta_1 = 4.3175$ 、 $\beta_2 = 4.4776$ が得られた。この場合に対して、2個の設計点座標を中心とする重点サンプリング・密度関数を構築して多峰性重点サンプリング・シミュレーション（以下で、M. I. S.で表す）に基づいて構造破損確率を推定する。

Table 2 Coordinates of Design points determined by the proposed method and respective reliability indices

Variable	Design point No.1	Design point No.2
x_1	-0.6006	0.0163
x_2	-0.8128	0.0217
x_3	-1.2017	-0.2168
x_4	-0.0735	-0.1215
x_5	-0.3125	-4.4582
x_6	-3.0314	0.1910
x_7	0.6132	0.0644
x_8	1.8158	0.1907
x_9	1.7915	0.1839
β_1, β_2	4.3175	4.4776

ii) 一方、各基本確率変数の平均値をRF法の初期点として、設計点を探索・決定する従来の手法によると、設計点探索の10回の繰り返しで、設計点座標 $(-0.6006, -0.8128, -1.2017, -0.0735, -0.3125, -3.0314, 0.6132, 1.8158, 1.7915)$ が1個だけ決定され、信頼性指標 $\beta_1 = 4.3175$ が求められた。この結果は、表2の設計点No.1に一致している。その他の点を無作為にRF法の初期点として、設計点探索を実行しても、これと同じ設計点に収束するだけであった。この場合に対しては、1個の設計点座標を用いて、重点サンプリング・シミュレーショ

ン（以下で，I. S.で表す）によって構造破損確率を推定する．各シミュレーション法による構造破損確率の推定量 \hat{P}_f の変動係数の所要水準を 0.01 に設定し， $Cov \leq 0.01$ の条件が満たされたとき，シミュレーションを停止し，その時の所要サンプル数を N ，所要計算時間を CPU time [sec]として示す．構造破損確率の推定量の精度の比較のために，サンプル数 $N=10^{11}$ の原始的モンテカルロ・シミュレーション（以下で，M. C. S.で表す）による構造破損確率の推定量 \hat{P}_f を，厳密解（以下で，Exact で表す）として示す．なお，使用計算機・言語は，「NEC 製 Value One (Pentium D)」・「Compaq Visual Fortran」である．

1 個の設計点だけを用いた重点サンプリング法 (I. S.)，提案手法で得られた 2 個の設計点座標を用いた多峰性重点サンプリング法 (M. I. S.) による構造破損確率の推定量と，構造破損確率の厳密解 (Exact) を表 3 に示す．表 3 から設計点が 1 個として計算した (I. S.) の結果は，構造破損確率の厳密解 (Exact) に比べて，明らかに大きな差が生じている．一方，2 個の設計点を用いた多峰性重点サンプリング法 (M. I. S.) の結果は，厳密解 (Exact) に近い結果を与えていることがわかる．これより，全象限に RF 法の初期点を設定して設計点探索を実行する提案手法によって，複雑な非線形空間の異なる象限に存在する構造破損確率推定に必要な設計点を遺漏なく探索・決定できていることがわかる．

7. 結 言

本研究では，RF 法の初期点を全象限において設定する設計点座標探索法を提案した．各象限の初期点は，象限間の相対的座標位置関係表す式を用いて，第 1 象限で生成された数個のサンプル点に対応する他の象限の擬似的サンプル点を決定し，効率化を図った．提案手法は，多

変数・非線形限界状態関数の多くの象限に広がる限界状態曲面上に RF 法の初期点を設定することによって，構造システムの信頼性解析に有効であることを数値計算例によって示した．

参考文献

- 1) Rackwitz R. and Fiessler B., “Structural Reliability under Combined Random Load Sequences”, *Computers & Structures*, Vol. 9, pp. 489-494, 1978.
- 2) 室津義定，米澤政昭，邵曉文，システム信頼性工学，共立出版，(2005)，pp. 88-91.
- 3) 奥田昇也，米澤政昭，限界状態曲面上に初期点を定める RF 法に基づく設計点探索法の研究—設計点情報を用いたシミュレーションに基づく構造信頼性解析法—，日本機械学会 関西支部第 91 期定時総会講演会講演論文集 No.164-1 (2016)，pp. 34-37.
- 4) A. M. Freudenthal, Safety and Probability of Structural Failure, *Trans. ASCE*, Vol.121, (1956), pp. 1337-1375.
- 5) Bourgund and C. G. Bucher: Importance Sampling Procedure Using Design Point (ISPUD) -A Users Manual, *Institut für Mechanik, Report*, No. 8, University of Innsbruck, (1986).
- 6) Schuëller, G. I. and Stix, R., A critical appraisal of methods to determine failure probabilities, *Structural Safety*, Vol. 4 (1987), pp. 293-309.
- 7) 長 尚，基礎知識としての構造信頼性設計(改訂新版)，山海堂，(1996)，pp. 103-104.

Table 3 Estimation results

Method	\hat{P}_f	N	CPU time [sec]	Design point utilized
I. S.	0.920×10^{-5}	56,720	0.200	Design point No.1 only
M. I. S.	1.360×10^{-5}	72,056	0.656	Design point No.1 and □ No.2

(Exact: $P_f = 1.348 \times 10^{-5}$, $Cov = 0.01$, $N = 734,080,913$)