

ICT を用いた「円周角の定理」の教材化についての研究

—GeoGebra の作図機能と表計算機能の連携した教材開発について—

西 仲 則 博*

Study of Preparation the Inscribed Angle Theorem Materials Using ICT

(NISHINAKA Norihiro)

1. はじめに

中学校数学の図形領域の学習において学習する「証明」に苦手意識を持つ生徒が多い。杉山(1986)は、「証明がわからない」生徒の原因について、「証明の必要を感じていない」「証明の必要性がわかっていない」ことを指摘している。これについては、平成28年度全国学力・学習状況調査において、「証明の必要性和意味の理解」をみる問題（(数学 A 8)）が出題され、正答率が62.3%であり、「課題がある」と報告されている。このような指摘は、平成20年、平成24年、平成25年の全国学力・実施状況調査でも同様に「課題がある」と報告されている。（文部科学省2016）

では、なぜ生徒は「証明の必要性」を感じないのであろうか。現行学習指導要領解説中学校数学の図形領域の目標には、「平面図形や空間図形についての観察、操作や実験などの活動を通して、図形に対する直観的な見方や考え方を深めるとともに、論理的に考察し表現する能力を培う。」（文部科学省2008）とあり、直観的な理解を論理的に考え、表現する能力を培うのである。すなわち、中学校の図形領域では、「観察、操作、実験などの活動」で得られた、図形の性質や関係が、一般的に成り立つかどうか論理的に筋道を立てて正しい推論ができるようにすることが求められている。（文部科学省2008）カリキュラム的には、中学校2年生で学習する論証で用いられる課題は、多くが小学校、中学校1年生で学んできた図形の性質や関係である。すでに生徒が知っている事を用いて、証明の仕方を学ぶのである。ここに、生徒と教師の乖離が存在する。多くの証明は、「成り立つことを示めせ。」という文末であるが、生徒にとっては、

* 近畿大学教職教育部講師

〔キーワード〕 数学教育、円周角の定理、ICT、GeoGebra

「当たり前のことをなぜ証明するのか」ということになる。解っていることを示す意義が理解されていないと考える。

これに対して、中学校3年生で学ぶ「円周角の定理」「円周角の定理の逆」等は中学校3年生で初めて習う内容である。円についての学習は、これまで、「ある点から一定の距離にある点の集まり」と定義するように点と点の関係に着目したり、線対称、点对称の対称性の理解やそれらの性質を用いての作図に焦点があてられていたためである。円周上の角に着目した学習は中学校3年生で初出になる。

円周角の定理の理解について、大規模調査では、平成13年度、平成15年度教育課程実施状況調査での集計結果(文部科学省2003、2005)が公表されている。その中で、平成15年度の調査では「円周角の定理を理解している」課題で、89.6%の生徒が通過しており、高い通過率を示している。円周角の定理の証明に関しては、平成13年度調査で、34.4%しか通過せず、無答率が43.8%と高い値を示しており、定理の証明に課題があることが報告されている。

本研究では、まず、2章で「円周角の定理」が内包している課題を明らかにし、第3章で、ICT、特に動的な数学ソフトウェアである GeoGebra の作図機能と表計算機能を用いて、シミュレーションと数値データを合わせ、観察、実験ができる教材を提案する。

2. 問題の所在

円周角の定理の学習において、課題となる事を「円周角の定理の表記上の問題」、「円周角と中心角の関係」「円周角同士の関係」を見出す活動における問題、「円周角の定理の証明における「場合分け」の問題」の3つとした。これらについて次に詳細に述べ、対応を検討する。

2-1. 円周角の定理の表記上の問題

円周角の定理と一言に言っても、多くの表記が存在する。何を円周角の定理とするかからその問題について検討し、教科書の表記についても調べ、問題点を述べる。

2-1-1. 円周角の定理の表記上の問題について

円周角の定理とは、ユークリッド原論(以下原論と略す)第Ⅲ巻命題3-20(ユークリッド 中村幸四郎他訳(1971))

「円において角が同じ弧を底辺とすると、中心角は円周角の2倍である。」

を指すことが多い。ここで、底辺は円周角を頂点とする三角形を考え、その底辺のことであり、

弧の弦である。すなわち、「同じ弧の円周角の大きさはその中心角の大きさの半分である。」ことになる。このことを基にして、原論では、第Ⅲ巻命題 3-21「円において同じ切片内の角は互いに等しい。」を導いている。ここで、「切片内」とは定義 3-6 において「(切片) 円の切片とは弦と弧とにかこまれた図形である。」とされるが、一般的には円内の劣弧と弦に囲まれている図形である。そのため、「切片内の角」とは、劣弧上の円周角を指している。しかし、中学校において円周角の定理は、原論の命題 3-20、と 3-21 を合わせたものを指している。

現行の学習指導要領には、中学校 3 年 図形の内容には次のように記されている。

2) 観察、操作や実験などの活動を通して、円周角と中心角の関係を見いだして理解し、それを用いて考察することができるようにする。

ア 円周角と中心角の関係を意味を理解し、それが証明できることを知ること。

イ 円周角と中心角の関係を具体的な場面で活用すること。

円周角の定理については、記されておらず、「円周角と中心角の関係」に留められている。但し、内容の取り扱いにおいて「円周角の定理の逆」と記されているが、円周角の定理の内容についての記述ではない。中学校学習指導要領解説数学編（文部科学省 2008 p 145）において次のように記されているからである。

円周角と中心角の間には、「一つの円において同じ弧に対する円周角の大きさは、中心角の大きさの半分である」という関係がある。・・・略・・・この円周角と中心角の関係を基にして、「一つの円において同じ弧に対する円周角の大きさは、一定である」ことを見いだすことができる。これら二つの見いだした事柄を、円周角の定理としてまとめる。（下線部は筆者）

この記述から、原論の命題 3-20 が指導要領で記されている「円周角と中心角の関係」を指していることがわかる。その関係を基にして得られる原論の命題 3-21 が「同じ弧に対する円周角の大きさは一定である」に対応している。ここで、「同じ弧に対する円周角の大きさは一定である」とは、同一円周上にある「円周角同士の関係」を示していることになる。すわち、中学校の円周角の定理は「円周角と中心角の関係」と「円周角同士の関係」の 2 つの関係を含んだ定理となっているのである。これ以降、円周角の定理については、この 2 つの関係を含有する定理として扱う。また、「円周角と中心角の関係」についての記述を「円周角の定理Ⅰ」、「円周角同士の関係」についての記述を「円周角の定理Ⅱ」として扱う。本研究では、円周角の定理を学習指導要領解説をもとにして次のようにまとめる

『円周角の定理

- ・一つの円において同じ弧に対する円周角の大きさは、中心角の大きさの半分である

(円周角の定理Ⅰ「円周角と中心角の関係」)

- ・一つの円において同じ弧に対する円周角の大きさは、一定である

(円周角の定理Ⅱ「円周角同士の関係」)

以後、円周角の定理は、この 2 つをまとめたことを指す。

2-1-2. 中学校の教科書における円周角の定理の記述について

前述したように、円周角の定理は、本来は別々である関係を合わせ持っていることになる。そこで、実際の教科書での扱いがどのようになっているかを調べた。

対象の教科書は、平成27年度の教科書検定に合格した、「未来へひろがる数学 3（新興出版社啓林館）」「中学数学 3（日本文教出版）」「改訂版中学校数学 3 年（数研出版）」「中学校数学 3 年（学校図書）」「中学数学 3（教育出版）」「新版数学の世界 3（大日本図書）」「新しい数学 3（東京書籍）」の 7 冊、7 社刊行の教科書である。円周角の定理とまとめられている記述箇所を抜き出し、「円周角と中心角の関係」と「円周角同士の関係」が分かち書きされているものを分離型、合わさっているものを合同型として集計した。その結果、分離型の表記を行っているのが、5 社の教科書、合同型の表記をしているのが、1 社であった。(表 1 参照)ただし、円周角の定理ⅠやⅡのどちらか一方を円周角の定理とする教科書はなかった。

表 1 教科書にみる円周角の定理の記述

教科書名/会社名 掲載ページ	記述型	円周角の定理の記述
未来へひろがる数学 3 新興出版社啓林館 p 158	分離型 図あり	1 一つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の大きさの半分である。 2 同じ弧に対する円周角の大きさは等しい。
改訂版中学校数学3年 数研出版 p163	分離型 図あり	1 一つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の大きさの半分である。 2 同じ弧に対する円周角の大きさは等しい。
中学数学 3 日本文教出版 p168	分離型 図あり	1 一つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の大きさの半分である。 2 同じ弧に対する円周角の大きさはすべて等しい。
中学数学3 教育出版 p177	分離型 図あり	1 一つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の大きさの $\frac{1}{2}$ である。 2 一つの弧に対する円周角の大きさはすべて等しい。
中学校数学3年 学校図書 p177	分離型 図あり	定理 円周角と中心角には次の性質が成り立つ 1 一つの弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。 2 一つの弧に対する円周角はすべて等しい。
新版数学の世界 3 大日本図書 p177	分離型 図あり	1 一つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の大きさの半分である。 2 一つの弧に対する円周角の大きさはすべて等しい。
新しい数学 3 東京書籍 p162	合同型 図無し	一つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する中心角の半分である。
学習指導要領解説中学校数学 文部科学省 p145		「一つの円において同じ弧に対する円周角の大きさは、中心角の大きさの半分である」 「一つの円において同じ弧に対する円周角の大きさは、一定である」

分離型の表記を行っている5社の全てにおいて、円周角の定理Ⅰについての記述を1番とし、円周角の定理Ⅱを2番として分かち書きを行っている。このうち、2社（新興出版社啓林館、数研出版）は全く記述が同じである。

1番の表記（円周角の定理Ⅰ）に着目してみると、新興出版社啓林館、数研出版、日本文教出版、大日本図書の4社は同じで、教育出版は半分 $\frac{1}{2}$ をと表記し、学校図書は「大きさ」を略していることがわかる。

2番の表記（円周角の定理Ⅱ）に着目すると、日本文教出版、教育出版、学校図書、大日本図書の4社は、「円周角の（大きさ）がすべて等しい」とすべてがある。これは、円周角の関係が2角や3角の関係だけでなく、全ての角同士の関係が等しいことを強調していることを示している。

合同型の表記をしているのが、東京書籍で、他の6社と違い「円周角と中心角の関係」と「円周角同士の関係」の位置が、「円周角同士の関係」、「円周角と中心角の関係」の順になっている。1つの文章のため、簡潔で覚えやすいという利点があるが、1文に2つの関係が含まれているため、そのことを読解し、理解するのには、難しさがあると考えられる。

このような教科書における円周角の定理の記述の違いは、数学的には問題ないのであるが、生徒の学習上無用の混乱を招くことが考えられるので、何らかの対策が必要である。

2-2. 「円周角と中心角の関係」「円周角同士の関係」を見出す活動

現行の学習指導要領（文部科学省2008）では、「観察、操作や実験などの活動を通して、円周角と中心角の関係を見いだして理解し・・・」とあるように、円周角の定理の学習においては、観察、操作、実験でその関係について予想を立てることから始まる。この予想を立てる段階において、用いられるものは、分度器、三角定規等である。しかし、これらの用具では、任意の角度を測ることが出来ない。分度器だと小数第一位の角、三角定規だと、 30° 、 45° 、 60° 、 90° の角とそれぞれの和、差で示される角だけになり、一般の角の大きさでは、確かめることができない。代表的な角度で成り立っていることを、「一般的な角度の大きさでも成り立つことを示すため」に証明活動に入っていくことができるから問題がないという指摘もできる。

しかし、生徒に分度器、三角定規を用意させることは、代表的な角度で測れることを前提とした教材を用意することになる。これは、生徒の活動をある程度制約することになり、任意の角度や、半径の違う円においても「円周角と中心角の関係」、「円周角同士の関係」が成り立つ

かどうかを発見することを阻害していると考え。そこでこれらの用具以外で、生徒が適当に描いた円において、円周角の定理を確かめる方法の開発が必要であると考え。これに対して、2つのアプローチを考える。一つは、作図の「等しい大きさの角の作図」を用いた方法である。もう一つは、「GeoGebraを用いてのシミュレーションを行うこと」の2つを提案する。

2-2-1. 「等しい大きさの角の作図」を用いた方法について

この作図は中学校では扱われないが、簡単な作図であり、等しい角度を作図することで、「大きさが等しい」ことを示せるだけでなく、ある角の整数倍の大きさの角も作図することができる。

作図方法は、元になる角の頂点 O を中心とする円を描き、円と角の2つの半直線の交点をそれぞれ A 、 B とする。コンパスの長さを保持したまま、移動先の半直線の端点 O' に針をおき、円を描き、半直線との交点を A' とする。次にもとの角の A 、 B の長さを半径とし、 A' を中心とする円 A' を描く。円 O' と円 A' の交点を B' として、半直線 $O'B'$ を引くと $\angle A'OB'$ が作図でき、これが元の $\angle AOB$ と大きさが等しい角である。これは、頂角が $\angle AOB$ となる二等辺三角形を AOB と合同になる二等辺三角形 $A'O'B'$ を作図してことになる。

この作図により、2つの角の大きさが等しいかどうかを調べるには、片方の角の大きさと同じ角をもう一方の角上に作図し、重なれば「大きさが等しい」が担保され、そうでなければ「大きさが等しくない」ということを知ることができる。

また、この作図法を用いることにより、任意の角の大きさに「円周角と中心角の関係」、「円周角同士の関係」が成り立つことを確認することができるのである。

2-2-3. GeoGebra を用いてのシミュレーション

GeoGebra を用いてのシミュレーションについては、3以降において詳細する。

2-3. 円周角の定理の証明における「場合分け」の問題

2-3-1. 生徒にとっての「場合分け」

中学校で学ぶ証明は、仮定(条件)が満たされるなら、どのような状況においても結論が成り立つことを示すことである。一般的に場合分けが必要な理由は、「同じパターンの証明ではできない箇所がある」からである。すなわち、ある条件下で証明をするうえで、ある範囲は A と

いうパターンを用いて証明できるが、違う範囲では A が使えなく、新しい B というパターンを用いなければならないからである。更に場合分けにおいては、「適切な場合分けが行われているか（他に良い場合分けがないか）」「条件をすべて網羅している場合分けか（抜けがないか）」「重複がないか」の 3 つの活動を行う必要がある。

一般的に、円周角の定理の証明では、図 1、図 2、図 3 の 3 つの場合に分けて考える。円周角の定理を証明するには、この 3 つの場合だけを考えることで十分であるが、その「理由」には触れられず、教科書の表記では、その前に活動があるにせよ、3 つの場合分けを天下りのように示されている。このようなことは、生徒にとっては「なぜ、場合分けが必要なのか」（場合分けの必要性）という疑問と「なぜ、その場合分けでよいのか」（場合分けの妥当性）という疑問を生むことになる。更に、中学校における証明の学習において、場合分けが必要となるのは、円周角の定理が初めてになるため、生徒の疑問は大きい。

場合分けの指導に深く入らないのは、これは学習指導要領解説（文部科学省2008）で、「円周角と中心角の関係が証明できることを知ることの学習は、円周角と中心角の位置関係の場合分けによる証明の必要を理解することが目的ではなく、証明のよさを理解できるようにすることがねらいである」

と、場合分けに重きを置く指導について歯止めをかけていることが影響していると考えられる。

2-3-2. 円周角の定理での「場合分け」の必要性について

前述のように、円周角の定理の証明では、図 1、図 2、図 3 のような 3 つの場合を考えて証明を行う。しかし、原論の命題3-20（前述の円周角の定理 I にあたる）の証明においては、

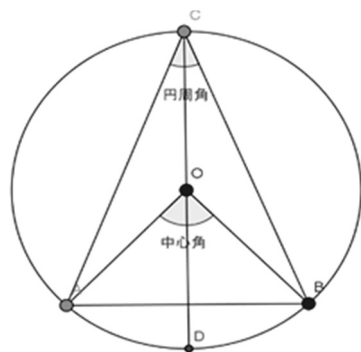


図1 中心 O が $\angle ACB$ の内側にある場合

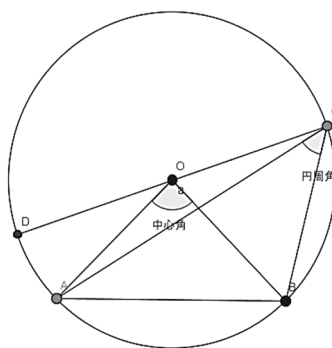


図2 中心 O が $\angle ACB$ の外側にある場合

図 1 のように中心 O が $\angle ACB$ の内側にある場合と、図 2 のように中心 O が $\angle ACB$ の外側にある 2 つの場合について証明を与えている。

図 1 の証明では、円周上の点 C と中心 O を通る直線をひき、 C と反対側で円と直線が交わる点 D として、 $OC=OA$ で $\triangle OCA$ が二等辺三角形になるため、「二等辺三角形の底角が等しい」「三角形の 1 つの外角は、それと隣り合わない 2 つの内角の和に等しい」を用いて、 $\angle COA = 2 \angle OCA$ を導き、 $\triangle OBC$ においても同様に行い、 $\angle AOB = 2 \angle ACB$ を導く。

図 2 の場合、円周上の点 C と中心 O を通る直線をひきその延長線上と円との交点を D とおく。この時、 $OC=OB$ で $\triangle OCB$ が二等辺三角形になるため、図 1 と同様にして $\angle BOD = 2 \angle BCO$ が導かれる。また、弧 AD に対して $\angle AOD = 2 \angle ACD$ が成り立つ。 $\angle AOB = \angle BOD - \angle AOD$ より、 $\angle AOB = 2 \angle ACB$ が成り立つ。

このように、図 2 の証明では、まず $\angle BOD = 2 \angle BCO$ の関係を証明して、次に $\angle AOD = 2 \angle ACD$ を証明して、「全体とある部分が同じ場合、ある部分を引いた残りも等しい」という閑雅を用いて、 $\angle AOB = 2 \angle ACB$ を証明している。すなわち、図 1 の証明のパターンがそのまま使うことができないため、図 1、図 2 の 2 つの場合分けが必要になることがわかるのである。しかし、原論の証明では、円周角の辺が直径であることは扱われていない。

これに対して、ポリアは「数学の問題における発見的な解き方」(ポリア 柴垣訳 1964 p115-117)において、「重ね合わせ」という問題解決の方法の提示の中で、特別な状態として、図 3 のように、中心が $\angle ACB$ 上にあるとき(線分 CA 上に中心 O があるとき、)を提示している。 CA が直径に重なるという特別な場合を考えることで、 $\angle AOB = 2 \angle ACB$ となることを容易に示すことができる。また、この状態が、図 1 や図 2 において、円周角の頂点を通る直径をひくことにより、図 3 の状態が内包されていることがわかる。すな

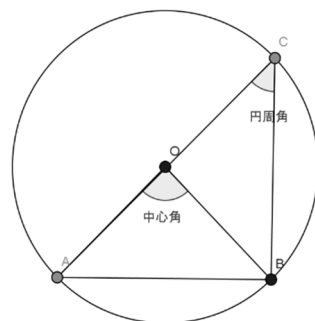


図 3 中心 O が $\angle ACB$ の辺上にある場合

わち一般的な円周角の場合の証明において、特別な状態(図 3 の状態)が 2 つあることを見出し、角度の代数的計算に帰着させ、証明するのである。ポリアはこのような解法を「特別な状態から出発して、特別な場合を重ね合わせることで一般解に達する」(ポリア 柴垣訳 1964 p117)と称している。すなわち、一般的な角の場合を特別な角の状態の重ね合わせと観ることにより、特別な角の状態での証明を組み合わせることで証明を行うことができることを示して

いるのである。このことは、証明の発見の方法として、「(1つの単位として考えられる) 特殊な事例を考え、その組み合わせで一般的な証明を発見すること」を示している。このような発見法が全てに有効ではない。特別な状態を発見することが容易ではないからである。また、図1や図2のような一般的な状態が先にあり、それを解析した中で、特別な状態を見つけるものであると考える。思考としては、逆向きの思考方法をとる。更に、特別な状態の図3から図1や図2のような一般的な状態を導くのは困難であるとする。

しかし、特別な状態を用いて、一般角の証明を行うため、場合分けが必要になるということになる。

2-3-3. 円周角の定理での「場合分け」の必要性や妥当性を発見する方法

円周角の定理の証明で3つの場合分けの必要性和、その妥当性を観察、操作や実験で確かめるには、円周上の点を、円周上を動く動点としてみることで、得られる。それは、次のよう説明である。

説明

円Oの円周上に2点A,Bをとり、弧ABをとると、 $\angle AOB$ ができ、これが中心角である。次に、弧ABに対して劣弧AB上を点AからBまで動く点Cを考える。弧ABに対する円周角が $\angle ACB$ となる。点Cを通る直径を考え、点Cの反対側の点をDとする。このとき、点Cが点Aから点Bまでに動く中で、点Dの位置を次のように整理できる

- ① 点Cが点Aを出発して線分BCと線分CDOが重なるまでは、図4の状態である。
- ② 点Cが線分BCと線分CDが重なるときは、図5の状態である。
- ③ 点Cが線分ACと線分CDが重なるまでは、図6の状態である。
- ④ 点Cが線分ACと線分CDが重なるときは、図7の状態である。
- ⑤ 点Cが線分ACと線分CDが重ならないときは、図8の状態である。

このように①～⑤までの5つの操作で、点Cが点Aから点Bまで移動している状態を作ることができ、弧ABに対する円周角の全ての状態を示すことができた。2-3-1で示した場合分けの活動の「条件をすべて網羅している場合分けか(抜けがないか)」ことが満たされている。

この5つの段階を精査すると、図4と図8は対称であり、図4と図8は同じ形であると考えて良い。同様に、図5と図7同じ形であると考えてよい。よって、この5つの状態は、図4、

図5、図6の3つの状態に絞ることができる。これにより、2-3-1で示した活動の「適切な場分けが行われているか（他に良い場合分けがないか）」「重複がないか」を満たすことができた。また、図4は図2、図5は図3、図6は図1とそれぞれ同じ状態を示しているので、円周角の定理の証明では、図1、図2、図3の場合を考えることで全ての場合が示されるのである。

このようにまとめることで、生徒たちにも「場合分け」の必然性が理解できると考える。そのため、点Cを動点として扱うことを容易に示す教材の開発が必要である。

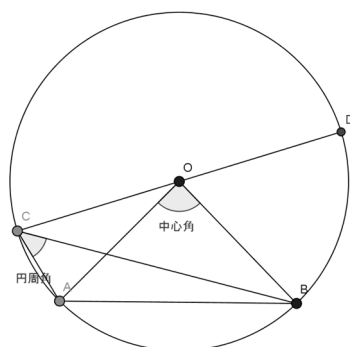


図4

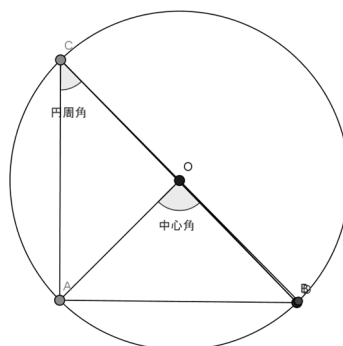


図5

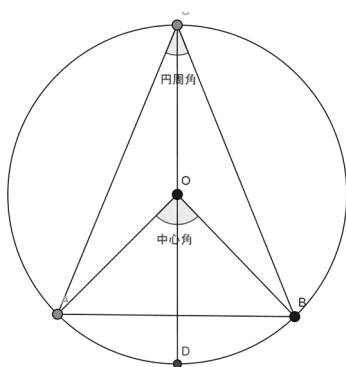


図6

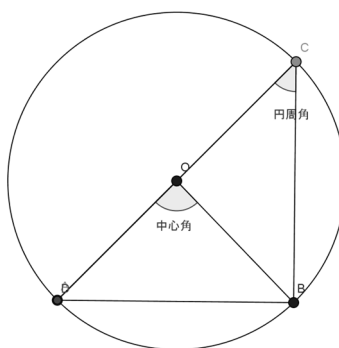


図7

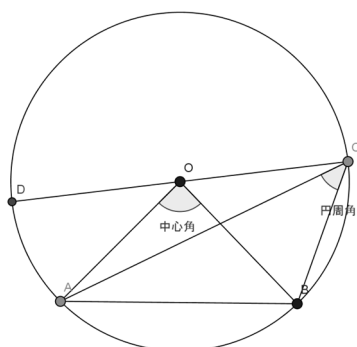


図8

3. ICT を用いた教材開発

前述の 2. では「円周角の定理の表記上の問題」、「円周角と中心角の関係」「円周角同士の関係」を見出す活動における問題、「円周角の定理の証明における「場合分け」の問題」をあげ、「円周角と中心角の関係」「円周角同士の関係」を見出す活動における問題、「円周角の定理の証明における「場合分け」の問題」に関する対策として、シミュレーション等の活用を挙げた。本章では、このシミュレーション等の活用について、動的な数学のソフトウェアとして、世界中で使われている GeoGebra の機能を用いた教材について述べる。

3-1-1. 数学の学習で GeoGebra を用いる理由

GeoGebra とは、Markus Hohenwarter (ザルツブルク大学、フロリダ北大西洋大学、ヨハネスケプラー大学)を中心に世界中で開発が続けられている動的数学ソフトウェアである。(濱田 2016) 当初は、動的な幾何ソフトとして登場し、座標平面が最初の画面から出る設定になっており、描いた直線や曲線は座標平面上の方程式として表されるのが特徴であった。しかし、バージョンを進めるにより、幾何、代数、解析、統計が行われるようになり、三次元平面の描写や CAS 機能等も充実して、またそれらが連携できるようになっていて、簡単な操作でそれらが実現できるのである。そのため、動的な数学ソフトウェアと呼ばれるようになっている。

また、デバイスフリーを目指しており、Windows 上、MacOS 上はもちろん、Linux、Web、ChromeApp、タブレット&スマートフォン (iOS、Android) 等で動くソフトウェアである。教室にプロジェクターと PC を持ち込まずに、タブレットかスマートフォンとテレビにつなげるケーブルだけを持って行くだけで生徒に見せることができるのである。

Web App や USB に納めることが出来るバージョンもあり、セキュリティ対策が進んだところでも、PC にインストールせずに動かすことが出来るので、PC 教室で生徒が自由に触れる環境を直ぐに構築できるのである。

これだけできて、非商用に限り、GeoGebra を自由に複製、配布、活用することができるのである。すなわち、教師、生徒にとっては数学を探究するツールとしては強力なものなのである。

また、GeoGebra を使った教材研究も盛んに行われており、日本語で読むことが出来る HP として

「GeoGebra 教材 (<https://www.geogebra.org/>)」

「GeoGebra 日本 (<https://sites.google.com/site/geogebrajp/>)」

「GeoGebra で日本語教材を作ろう

(<http://www.aharalab.sakura.ne.jp/geogebra/index.php>)」

では、教材が多くアップされており、充実したものとなっている。教師の教材研究に非常に参考になる。このようなフォローも充実した環境にある。

すなわち、数学のツールとして機能の充実だけでなく、教師、生徒にとって使いやすくなる工夫がされているのである。

3-1-2. GeoGebra の作図の基本機能について

GeoGebra は多機能なソフトウェアであることを述べたが、起動すると数式ビューとグラフィックビューが同時に現れる。(図9参照)

GeoGebra では、パースペクティブとして、「数式」「幾何(グラフィック)」「表計算」「CAS」「3Dグラフィック」「確率」を選択することができ、複数のパースペクティブを同時に示すことができる。

図形だけの場合は、幾何を選択すると画面が変わり、 $x-y$ 座標が無くなり、白紙のような画面に変わる。(図10参照) 正しくは、グラフィックビュー画面で $x-y$ 軸が消え、数式ビューも隠れた形である。

幾何の画面で用いることができ多くの作図ツールは、画面上のボタンの矢印▽をクリックすることで、現れ、選択することで使うことができる。代表的なものとしては、点の作図ツールには「新規の点」「オブジェクト上の点」「点を付ける／外す」「2つのオブジェクトの交点」「中点または中心」「複素数」の5つのオプションが用意されている。直線の作図ツールにおいても7つのオプションが用意されており、別に特別な直線のツ

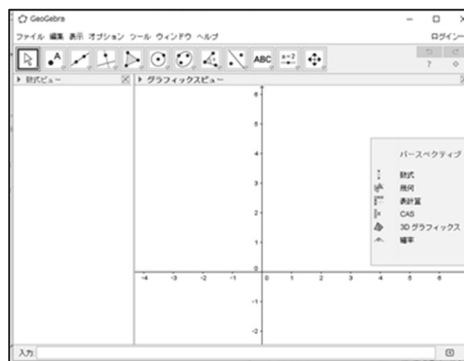


図9 GeoGebraの起動後の画面

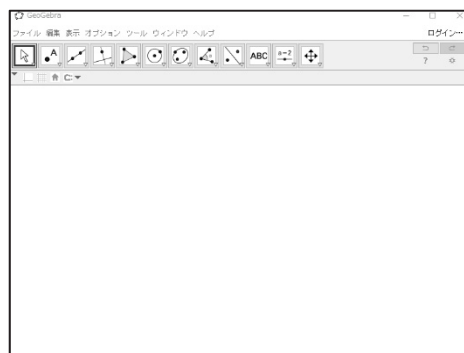


図10 幾何の画面

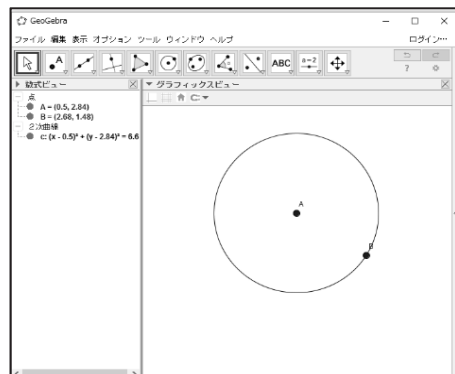


図11 円を描いた状態

ルもあり、「垂線」「平行線」「垂直二等分線」「角の二等分線」「円の接線」「極線または直径」「最良な近似直線」「軌跡」などのオプションが用意されている。円の作図ツールも 9 つのオプションが用意されている。これらを用いて点 A を中心に半径 AB の円を作図したのが図11である。この作図には円の作図ツールからオプション「中心と円周上の 1 点で決まる円」を選択し、画面に適当なところに点を決めクリックして中心とし、他の 1 点を決めクリックすると直ぐに円が画面に現れる。3 つのクリックで円を描くことができ、容易に作図ができるのである。図 11 では、数式ビューを同時に開けており、数式ビューの中には座標平面上の点 A、B の座標と円の方程式が示されていることがわかる。

3-1-3. GeoGebra の計測ツールについて

GeoGebra には作図した図形の「角度の大きさ」、「2 点間の距離」、「面積」、「傾き」等を測定できる機能（計測ツール）が実装されている。また、「大きさを指定した角度」の作図もできるのである。(図12参照) この機能を用いると、円周角、中心角の大きさを測定することができ、数値で示すことができるのである。図13は計測ツールを用いて、中心角と円周角の大きさを計測した結果を示したものである。中心角 88.84° 、円周角 $=44.42^\circ$ の結果を示している。計測の精度はオプションの「丸め」によって選択ができ、計測後でも丸めによって計測値が自動的に丸められる。(図14参照)



図 12 計測ツール

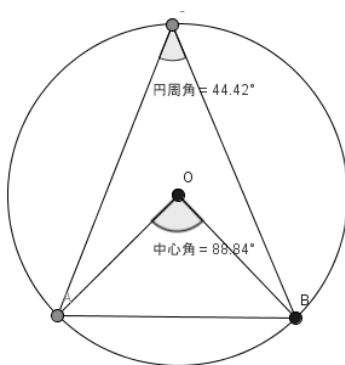


図 13 中心角、円周角の計測の結果

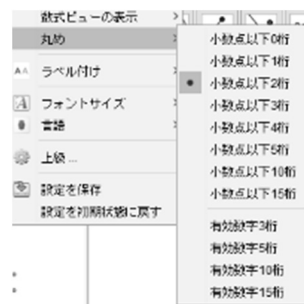


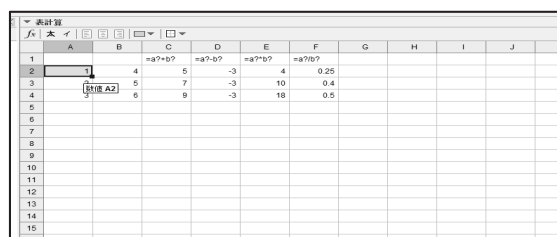
図 14 丸め 選択画面

3-1-4. GeoGebra の表計算について

Geogebra の画面で、表示－表計算と選択すると表計算の画面が現れる。

表計算ソフトのように多機能ではないが、基本的な計算はしっかりとできる。図14は A 列に 1、2、3、B 列に4、5、6と入力したものである。C から F 列のそれぞれの列に「=a?+b?」、「=a?-b?」「=a?*b?」「=a?/b?」(?には行番号が入る)と入力すると和、差、積、商が求めることができる。(図15参照)

表計算は、表の計算ができるだけでなく、統計機能(1 変数解析、2 変数解析分析、多変数解析分析)を用いる才の入力画面にもなる。統計だけでなく、 $x-y$ 平面上や 3D グラフの点を入力することにも使える。また、作図で求めた角度の大きさ、直線の長さ、面積等の計測した結果をレコード機能用いることで記録することができる場所でもある。



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			=a?+b?	=a?-b?	=a?*b?	=a?/b?				
2	1	4	5	-3	4	0.25				
3		5	7	-3	10	0.4				
4		6	9	-3	18	0.5				
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										

図 15 表計算の様子

すなわち、表計算は単独で使うこともできるが、他のビューと有機的に使うことで、数学における実験を強力にサポートしてくれるのである。

本研究では、この表計算機能と、3-1-2で述べた作図機能、3-1-3で述べた計測ツールを有機的に融合させることで、円周角の定理における活動をサポートしてくれる教材を次に提示する。

3-1-5. Geogebra を用いた先行研究について

Geogebra の複数機能を用いた実践的な研究としては、嶋村(2010)は CAS (数式処理機能) と DGS (動的幾何ソフト) の 2 つを用いることで、関数の積についての考察が容易に可能であることを示し、この 2 つの機能を内包している Geogebra 用いた指導の可能性を示唆している。舟川(2011)は面積測定機能を使い、愛知県の公立高等学校入試問題である直角三角形と長方形の 2 つの図形が重なる面積の変化を幾何ビューとグラフィックビューを連携させることを行っている。また、これを 2 つの図形の重なる部分の面積を残して、2 つの図形を円にしたと

きの模様についても報告している。大西（2014）は三角形の底辺と平行で頂点を通る直線を引き、その線上を頂点が移動するときの重心の軌跡を求める課題をあげ、GeoGebra の CAS 機能と作図機能と連動させた使用が可能であることを示し、学校での CAS の利用の可能性について論じている。木下（2012）は Geogebra の表計算機能と作図機能を連携させた教材の可能性として、履歴として値を記録することができるため、履歴を用いての考察の可能性を示している。次に述べる円周角の定理のシミュレーションも履歴からの考察ができるようにしている。

3-2. 円周角の定理のシミュレーション教材

3-2-1. 動的幾何ソフトがもたらす認識上の転換

GeoGebra 等の動的幾何ソフトを用いることは、図形を容易に作図できるだけ、図形の持つ量（長さ、角の大きさ、面積等）計測できるだけでなく、画面上で図形を自由に移動したり、他の図形に変形することができることにある。紙の上の図形は動くこともできないし、他の図形に変更することも容易に行うことができないが、動的幾何ソフトはそれが容易にできるため、静的な図を動的に観ることが出来るのである。これは、生徒にとって大きなパラダイムの転換になる。そして、点や直線、図形等を動かすことで、何が変わり、何が変わらないか、変化の中でも関係性が保たれたりすることに注目することが容易になるのである。これは、何かを変えることで、それに伴って変化するかどうかを観ることであり、関数関係として捉えることを可能とするのである。すなわち、図形の学習の中に関数関係という視点を導入することができるのである。関数関係の視点で、対応と変化という観点から図形を捉え直すことができる。この捉え直しは、従来は頭の中で行われたことであるが、動的幾何ソフトはそれを視覚化、数値化できるのである。

3-2-2. 円周角の定理のシミュレーション教材の条件

2-2では、「任意の角の大きさに「円周角と中心角の関係」、「円周角同士の関係」が成り立つことを確認することができる」活動の大事さを述べた。

2-3では、「円周角の定理での「場合分け」の必要性や妥当性を発見する」活動を支援するシミュレーションの必要性を述べた。

すなわち、円周角の定理のシミュレーション教材の条件とは

- ・円周角と中心角、円周角同士の関係が任意の角で調べることができる

- ・「場合分け」の必要性和妥当性を発見できる

この 2 点であり、これを満たす教材を提示する。

3-3. GeoGebra の作図機能と表計算機能を連携させた教材

3-3-1. 教材の概要

円周上の点 C を点 A から B まで移動したときの円周角と中心角の大きさの変化について調べることができるようにする。そのため、円周角、中心角の大きさを計測ツールで計測し、その値を表計算にその履歴が残すようにする。

3-3-2. 教材の作成方法

3-1-2 で述べたように、円 O を作成する。(円を作成後、点の名前を変更する) 円 O の円周上に任意の点 A、C をオブジェクト上の点としてとる。半径 OA、OB、弦 AB、円周角 ACB を線分で作図する。その後、計測ツールの「角度の大きさ」のオプションを選択し、 $\angle ACB$ 、 $\angle AOB$ をそれぞれ計測する。この段階までの図が、3-1-3 で示した図 13 である。ここから、表示→表計算を選択して、表計算の機能を有効にする。

その後、 $\angle ACB$ の近くで右クリックをすると、図 16 のようなポップアップが現れ、表計算に記録を選択すると、表計算に角度の大きさを記録することができる。同様にして $\angle AOB$ についても行くと、図 17 のような画面になり、これで点 C を動かすと表計算の A 列、B 列にそれぞれの値が記録されていく。しかし、実際には、中心角が点 C の変化と関係がないため、B 列には最初だけしか記録されない。そのため、点 C を移動後に、表計算上の B2 の値をコピーするとよい。(図 18 参照)

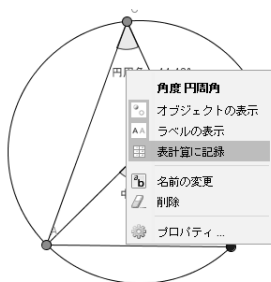


図 16 ポップアップの様子

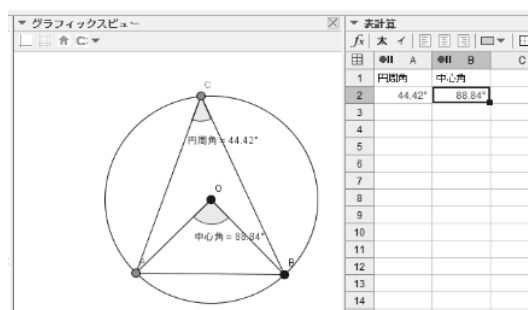


図 17 記録の準備画面

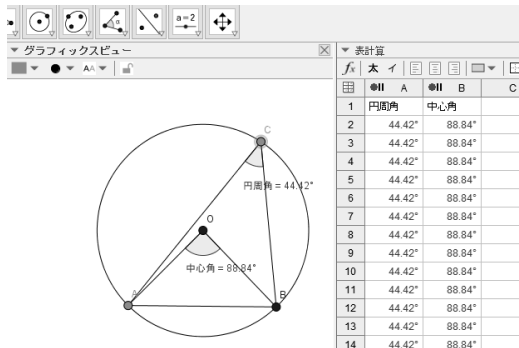


図 18 点 C を移動後の画面

	A	B	C
1	円周角	中心角	
2	44.42°	88.84°	0.5
3	44.42°	88.84°	0.5
4	44.42°	88.84°	0.5
5	44.42°	88.84°	0.5
6	44.42°	88.84°	0.5
7	44.42°	88.84°	0.5
8	44.42°	88.84°	0.5
9	44.42°	88.84°	0.5
10	44.42°	88.84°	0.5
11	44.42°	88.84°	0.5
12	44.42°	88.84°	0.5
13	44.42°	88.84°	0.5
14	44.42°	88.84°	0.5
15	44.42°	88.84°	0.5
16	44.42°	88.84°	0.5
17	44.42°	88.84°	0.5
18	44.42°	88.84°	0.5
19	44.42°	88.84°	0.5

図 19 円周角が中心角の半分

3-3-3. 表計算での確認と可能性

円周上の点 C を動かして、円周角の大きさの履歴が残った表計算ビュー上で、「円周角が中心角の半分」であるかどうかを確認める必要がある。そこで、表計算機能を用いて、セルの C2 に $=a2/b2$ と入力する。これは、「セル a2 の値をセル b2 の値で割ったときの商を求める」数式である。入力後 C2 の表示が「0.5」であることを確認してから、数式をコピーすると、それぞれの円周角と中心角の値を割った値が示される。(図19参照)これにより、実験で得た円周角、中心角の大きさの全てにおいて、「円周角の大きさは円周角の半分」であることを確かめることができたのである。

このように、シミュレーションを行って得た値を基にして、計算を行うことで、予想していた関係を確認することができることは、これまでの思考方法とは違ったアプローチを提供する。従前は、図形の性質を図を基にして考えていたが、GeoGebra を用いることで、図形の性質を数値でも容易に確認できるのである。

3-3-4. 任意の角の大きさでも成り立つ

3-3-2、3-3-3で示した使用法以外に、点Bを移動させることにより、半径が変化し、中心角の大きさも変化する。そして、そのそれぞれの場合において、円周角、中心角の大きさが記録されていく（中心角が変化するため記録が可能になる）。それぞれの値について、（円周角の大きさ）／（中心角の大きさ）を計算し、比較するとよい。全ての値が0.5になることを確認できる。この操作を行うことで、「任意の大きさの円、任意の大きさの円周角、中心角」で「円周角と中

心角の関係」、「円周角同士の関係」を確かめられる。これで、全ての場合で円周角の定理が成り立つことを確かめることができるのである。この確かめた後に、証明をして、論理的に理解することが大事であると考える。

3-4. GeoGebra を用いての円周角の定理から広がる定理

3-4-1. 円周角の定理からの教材の作成

円周角の定理のシミュレーションを少し改良すると、円周角の定理、接弦定理、内接四角形の対角の和の定理を説明できる。これは、日本文教出版社の中学数学3（日本文教出版2016）の発展的な課題を扱う「深める数学」の中で、「円周角を動かしていくと…」という題で示されているものである。円周角の定理から、円周上の点を移動することで、接弦定理（中学校では未習）、「内接する四角形の対角の和は 180° 」につなげることができるのである。これを GeoGebra を用いて表現したのが、図20～図22である。円周上の点 D を右方向に移動させていくと、点 B に近づいていき、点 B と重なる状態になる。このとき、直線 BD が点 B における円 O の接線になり、点 B が接点になる。この状態まで、 $\angle ACB = \angle ADB$ が成り立っている。（接弦定理）である。点 D が点 B を通過すると。円 O に内接する四角形 ACBD ができる。このとき、 $\angle ACB$ と $\angle ADB$ の大きさの和が 180° になることがわかる。このように、GeoGebra を用いることで、以前はばらばらに教えていた定理が、ある形からの変形として捉えることができるのである。すなわち、「点を移動する」ことで、状態が変化していき、別々の定理をつなげていくのである。

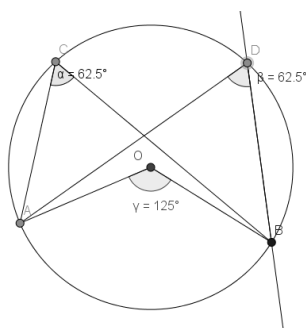


図 20 円周角の定理

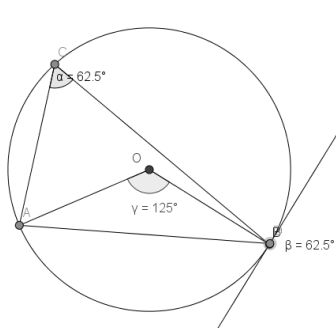


図 21 接弦の定理の状態

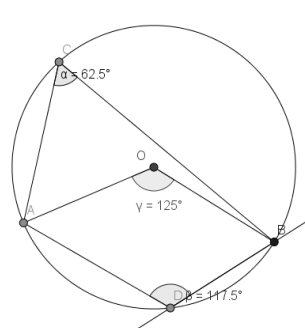


図 22 内接四角形の対角の和

3-4-2. 実験授業について

3-4-1の教材については、筆者が実際に中学校3年生を対象に実験授業を行った。その結果を報告する。

3-4-2-1. 授業の概要

まず、GeoGebraを用いて、図19の画面をプロジェクターで黒板に映して円周角の定理の復習を行った。次に、点Dを動かしても、円周角の定理が成り立っていることを確認しながら、点Dを点Bに限りなく近づけていった。そして、点Bと重なる前で止めて、「点Bと重なったらどのようなになるか」と予想をさせた。その後、点Dを点Bに重ねた状態でまた、とめ、接弦定理の説明を行った。点Dを点Bを通過させた状態でとめて、円に内接する四角形になっていることを気づかせる。次に表示されている2つの数字を比較させ、内対角の和が 180° になることを確認した。この後、「いつでも内接四角形の内対角のが 180° であるか」と問い、証明を行った。最後に、もう一度GeoGebraで学習した内容を振り返った。

3-4-2-2. 生徒の感想

授業後に授業の感想を書ってもらった中から、図形を動かすことについて書いている生徒の感想をあげる。

ある生徒は、コンピュータを用いることで「数学をする」ことができることを認識した上で、*「動かない」図形から「動く」図形にするだけで、ずっと理解しやすかった。数学はどの方向から見ても理論を通して数学することができるとわかった。*

と、図形を動かすことで、定理の拡張をすることになり、それが「数学する」ことに繋がっていると考えられる記述である。

また、他の生徒は、

「1つの図形を動かすことで、いろいろな定理とか考え方ができるのには感度した。そして、1つの図形を動かすことで、色々な考え方、見方ができることをしれたので、それを活かして生活の中に疑問を持てみたい。」

と、数学の考え方を生活まで広げ、クリティカルに物事を見ていきたいとしている。

この2人の感想から、図形を動かす経験が、違うとみていたものをつなげることができたり、見方や考え方を変えるきっかけを作ったと考える。

4. 結語

本研究では、中学校 3 年生で学習する円周角の定理について、考察を行う中で、円周角の定理の学習において、課題となる事を「円周角の定理の表記上の問題」、「円周角と中心角の関係」「円周角同士の関係」を見出す活動における問題、「円周角の定理の証明における「場合分け」の問題」の 3 つを同定した。

これらに対する対策として、

- ・円周角、中心角の大きさの関係について、角度の移動の作図を用いることで確認することを提案した。(2-2-1)

- ・場合分けの妥当性を示すために、円周上の点 C を点 A から点 B まで移動する過程を場合分けし、それを精査する活動を提案した (2-3-3。円周角の定理での「場合分け」の必要性や妥当性を発見する方法)

- ・上記 2 つの活動を支援するために、動的数学ソフトウェアである GeoGebra の作図機能と計測ツール、表計算機能を用いて、点 C の位置の変化による円周角と中心角の大きさの変化を捉えることができることを示した。また、この教材は、GeoGebra の基本機能の連携であるため、容易に作成できることを示した。

- ・円周角の定理の説明で用いた図に、新たな円周上の点を取り、円周角を取り、その点を円周上を移動させることにより、円周角の定理、接弦定理、内接四角形の内対角の和が 180° であることを、円周角の定理の変形として捉えることを示した。これに関しては、実際に中学校 3 年生に対して授業を行い、図形を動かすことで、見方や考え方を変えることができたという生徒がいた。

今後の課題として、次期学習指導要領の改訂作業が行われ、アクティブラーニング、資質・能力の育成に重きをおいた指導が求められてくる。そのような授業には、ICT の活用が欠かせないを考える。GeoGebra は数学の学習を強力にサポートするツールであり、このような授業に非常に適していると考え。そのため、今回行ったような教材開発とそれを授業で効果的に使用することや、生徒がそれらを使って問題解決していくような授業の構築が今後の課題である。

引用文献

- ジョージ・ポリア著 訳 柴垣和三雄・金山靖夫 (1964)：数学の問題の発見的解き方 1
みすず書房
- 木下潤一 (2012) GeoGebra を用いた数学的探究とその教材化に関する研究 一表計算機能を中心にして— 愛知教育大学数学教室発行 イブシロン Vol.54、p139-144
- 文部科学省(2003)平成13年度小・中学校教育課程実施状況調査ペーパーテスト調査集計結果 p72、73 http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h13/top.htm H28.12.21アクセス
- 文部科学省 (2005) 平成15年度小・中学校教育課程実施状況調査ペーパーテスト調査集計結果 p74、172 http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h15/index.htm H28.12.21アクセス
- 文部科学省 (2008)：中学校学習指導要領解説数学編、教育出版
- 文部科学省 (2016)：平成28年度 全国学力・学習状況調査 報告書 【中学校／数学】、
文部科学省 p72
- ユークリッド (1971) 中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵訳・解説
：ユークリッド原論 共立出版
- 濱田 龍義 (2016)「GeoGebra とプログラミング」
<https://www.geogebra.org/m/F9wsuGHT#chapter/155247> H28.12.20アクセス
- 舟川 快 (2011) GeoGebra の教育利用：面積測定と極限
数理解析研究所講究録 1735、p23-29、2011-04
- 大西俊弘 (2015) CAS(数式処理)機能を活かす教材開発 — GeoGebra を利用して軌跡の方程式を求める — 秋期研究大会発表集録 48、p 427-430、公益社団法人日本数学教育学会
- 杉山 吉茂 (1986)：公理的方法に基づく算数・数学の学習指導 東洋館
- 嶋村 元太郎 (2010)
GeoGebra の DGS 環境での CAS 機能活用による可能性の検討 —多面的な見方に着目して—、
数学教育論文発表会論文集 43(1)、p97-102、公益財団法人日本数学教育学会
- 比較検討を行った現行の中学教科書
岡本 和夫 他 (2016)「未来へひろがる数学3」 新興出版社啓林館
重松 敬一 他 (2016)「中学数学3」 日本文教出版

岡部 恒治 他（2016）「改訂版中学校数学3年」 数研出版

一松 信 他（2016）「中学校数学3年」 学校図書

澤田 利夫 他（2016）「中学数学3」 教育出版

赤 攝也 他（2016）「新版数学の世界3」大日本図書

藤井 斉亮 他（2016）「新しい数学3」 東京書籍