

効率的シミュレーションによる構造信頼性解析

奥田 昇也

Structural Reliability Analysis Based on an Efficient Simulation Method

Shoya OKUDA

This paper describes an estimation method of the structural failure probability based on an efficient Monte Carlo simulation, with which variance reduction methods of a directional importance sampling and a partition of the region are combined to improve the simulation efficiency. The structural failure probability is formulated by using a radial variable and a directional variable. Samples of the radial variable are generated from a truncated chi-square *p.d.f.* defined outside the β -sphere region. And instead of constructing a directional importance sampling *p.d.f.* beforehand, directional variable samples are determined from those generated by an importance sampling *p.d.f.* centered at the design points on the limit state surfaces in the rectangular coordinates and the probability volume contained in a hyperconical domain subtended by an infinitesimal increment at the respective determined directional variable is evaluated numerically and adopted it equivalently as a directional importance sampling probability density of the sampled direction. Numerical examples show that the proposed method gives accurate estimations of structural failure probabilities efficiently.

Key words: Monte Carlo simulation, Structural failure probability, Directional Importance Sampling, Partition of the region method, variance reduction method

1. 結 言

構造破損確率をシミュレーションによって推定するために、シミュレーションの効率を高める分散減少法¹⁾が不可欠である。本研究は、構造破損確率をモンテカルロ・シミュレーションによって推定する場合に、分散減少法の2つの方法、方向重点サンプリング²⁾と領域分割法³⁾を結合してシミュレーションの効率化を図る方法を提案する。

構造破損確率を動径変数と方向ベクトル変数を用いて定式化する。動径変数のサンプルは、 β 超球外部領域で定義される変形カイ2乗確率密度関数から生成する。これによって、限界状態曲面の安全領域内の大きな領域を占める β 超球内の動径変数のサンプリングを省略して、シミュレーションの効率を高めることを目指している。一方、方向ベクトル変数のサンプルは、直角座標系で定義される設計点重点サンプリング確率密度関数^{5,6)}から生成されるサンプル点の方向ベクトルから決定する。さらに、方向重点サンプリング確率密度関数をあらかじめ構築する代わりに、決定された方向ベクトルを含むその方向ベクトルの近傍の微小超円錐領域に含まれる確率体積を、等価的にその方向ベクトルの方向重点サンプリング確率密度として決定し、これを用いて方向重点サンプリング効果を付与する。設計点重点サンプリング確率密度関数からのサンプル点は、仮にそれが安全領域上

のサンプル点であっても、方向ベクトルサンプルとして活用出来るという利点がある。

以下では、2つの分散減少法を結合したシミュレーションによって推定するための構造破損確率の定式化を行うとともに、シミュレーションの手順を示す。数値計算例により提案手法の有効性を各種シミュレーション法による結果と比較して示す。

2 構造破損確率の定義式

基本確率変数は、すべて正規確率変数で、時間に依存しない信頼性解析問題において、構造破損確率 P_f は、次式で与えられる。

$$P_f = \int_{all \mathbf{u}} I_{D_f}(\mathbf{u}) f_U(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{u} は、 k 次元基本確率変数、 $f_U(\mathbf{u})$ は、基本確率変数 \mathbf{u} の結合確率密度関数、 $I_{D_f}(\mathbf{u})$ は、システムの状態を判別する指標関数であり、システムが破損状態にあれば、 $I_{D_f}(\mathbf{u})=1$ 、安全状態にあれば、 $I_{D_f}(\mathbf{u})=0$ となる。

3 動径と方向ベクトルを用いた破損確率定義式

基本確率変数 \mathbf{u} を動径 r と方向ベクトル $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_k)$ に置き換える。 a_1, a_2, \dots, a_k は、 u_1, u_2, \dots, u_k 軸に対する方向余弦であり、その2乗和=1の関係がある。基本確率変数 \mathbf{u} を r と \mathbf{a} を用いて、 $\mathbf{u} = r\mathbf{a}$ と表すと、

微小要素 du と方向ベクトル \mathbf{a} と動径 r の微小要素の積 $dadr$ の間には、次の関係が成り立つ。

$$du = r^{k-1} dadr \quad (2)$$

この関係を利用すると、式(1)は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_f &= \int_0^\infty \int_{\mathbf{a} \in \Omega_k} I_{D_f}(\mathbf{ra}) r^{k-1} f_{RA}(\mathbf{ra}) dadr \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbf{a} \in \Omega_k} I_{D_f}(\mathbf{ra}) r^{k-1} f_{R|A}(r|\mathbf{a}) f_A(\mathbf{a}) dr d\mathbf{a} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 Ω_k は、 k 次元単位超球の超表面領域を表す。 $f_{RA}(\mathbf{ra})$ は、方向ベクトル \mathbf{a} と動径 r の同時確率密度関数であり、基本確率変数が正規分布に従う場合、次式に示すように動径 r に関する標準正規確率密度関数 $f_R(r)$ に一致する。

$$\begin{aligned} f_{RA}(\mathbf{ra}) &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(ra_i)^2\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}r^2\right\} \equiv f_R(r) \end{aligned} \quad (4)$$

また、 $f_A(\mathbf{a})$ は、方向ベクトル \mathbf{a} の確率密度関数で、単位超球表面積 $S_k(1)$ と、次の関係がある。

$$f_A(\mathbf{a}) = \frac{1}{S_k(1)} = \frac{1}{2\pi^{k/2}/\Gamma(k/2)} \quad (5)$$

ここで、 $\Gamma(\cdot)$ は、ガンマ関数である。

また、 $f_{R|A}(r|\mathbf{a})$ は、方向ベクトル \mathbf{a} を条件とする動径 r の条件付確率密度関数であり、次の関係がある。

$$f_{R|A}(r|\mathbf{a}) = \frac{f_{RA}(\mathbf{ra})}{f_A(\mathbf{a})} = S_k(1) f_R(r) \quad (6)$$

また、式(3)の次の項は、式(4)、(5)、(6)の関係より、

$$\begin{aligned} r^{k-1} f_{R|A}(r|\mathbf{a}) dr &= r^{k-1} S_k(1) f_R(r) dr \\ &= r^{k-1} \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)} \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}r^2\right\} dr \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、変数変換、

$$z = r^2 \quad (8)$$

を導入すると、次の関係、

$$dz = 2r dr \quad (9)$$

がある。結局、式(7)は、次のように表される。

$$\frac{2r(r^2)^{(k-2)/2}}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \exp\left\{-\frac{1}{2}r^2\right\} dr = f_{\chi^2}(z) dz \quad (10)$$

ここで、

$$f_{\chi^2}(z) = \frac{z^{(k-2)/2}}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \exp\left\{-\frac{1}{2}z\right\} \quad (11)$$

は、自由度 k のカイ 2 乗確率密度関数である。

式(11)を用いて、式(3)の構造破損確率は、次式で表される。

$$\begin{aligned} P_f &= \int_0^\infty \int_{\mathbf{a} \in \Omega_k} I_{D_f}(\sqrt{z}\mathbf{a}) f_A(\mathbf{a}) d\mathbf{a} f_{\chi^2}(z) dz \\ &= E_{f_{\chi^2}} \left\{ E_{f_A} \left[I_{D_f}(\sqrt{z}\mathbf{a}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $E_{f_{\chi^2}}\{\cdot\}$ は、 $f_{\chi^2}(z)$ に関する $\{\cdot\}$ の期待値であり、 $E_{f_A}[\cdot]$ は、 $f_A(\mathbf{a})$ に関する $[\cdot]$ の期待値である。

以下では、式(12)で与えられる構造破損確率を効率的に推定することを考える。

3.1 領域分割法によるサンプリングの効率化

まず、破損モードが 1 個の場合に、領域分割法を適用して、動径のサンプリング領域を、信頼性指標 β を半径とする超球 (β 超球とよぶ) の外部領域に限定することを考える。信頼性指標 β は、原点から限界状態曲面までの最短距離である。破損モードが l 個の多破損モードを有する信頼性解析問題の場合は、原点から各限界状態曲面までの l 個の最短距離 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ の内の最小のものを、その構造システムの信頼性指標 β とする。

新たに、変形カイ 2 乗確率密度関数 $f_{\chi_t^2}(z)$ を、次式で定義する。

$$f_{\chi_t^2}(z) = \begin{cases} f_{\chi^2}(z) / [1 - F_{\chi^2}(\beta^2)] & : z \geq \beta^2 \\ 0 & : z < \beta^2 \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 $F_{\chi^2}(\beta^2)$ は、カイ 2 乗確率分布の区間 $[0 \sim \beta^2]$ の下側確率であり、式(13)は、 β 超球の外部領域において次の条件を満たす。

$$\int_{\beta^2}^\infty f_{\chi_t^2}(z) dz = 1 \quad (14)$$

式(13)を用いると、式(12)で与えられる構造破損確率は、次のように表される。

$$\begin{aligned} P_f &= [1 - F_{\chi^2}(\beta^2)] \int_{\beta^2}^\infty f_{\chi_t^2}(z) \left[\int_{\mathbf{a} \in \Omega_k} I_{D_f}(\sqrt{z}\mathbf{a}) f_A(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \right] dz \\ &= [1 - F_{\chi^2}(\beta^2)] E_{f_{\chi_t^2}} \left\{ E_{f_A} [I_{D_f}(\sqrt{z}\mathbf{a})] \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで $E_{f_{\chi_t^2}}\{\cdot\}$ は $f_{\chi_t^2}(z)$ に関する $\{\cdot\}$ の期待値である。

3.2 方向重点サンプリング法による効率化

次に、新たに方向重点サンプリング確率密度関数を導入して、方向ベクトルのサンプルを生成することを考える。式(12)の方向ベクトル確率密度関数 $f_A(\mathbf{a})$ に対して、新たに方向重点サンプリング確率密度関数 $h_A(\mathbf{a})$ を導入すると、式(15)は、次のように書き換えられる。

$$P_f = [1 - F_{\chi^2}(\beta^2)] \int_{\beta^2}^\infty f_{\chi_t^2}(z) \left[\int_{\mathbf{a} \in \Omega_k} I_{D_f}(\sqrt{z}\mathbf{a}) h_A(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \right] dz$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 - F_{\chi^2}(\beta^2) \right] \int_{\beta^2}^{\infty} f_{\chi^2}(z) \left[\int_{a \in \Omega_k} I_{D_f}(\sqrt{z}a) \frac{f_A(a)}{h_A(a)} h_A(a) da \right] dz \\
&= \left[1 - F_{\chi^2}(\beta^2) \right] E_{f_{\chi^2}} \left\{ E_{h_A} \left[I_{D_f}(\sqrt{z}a) \frac{f_A(a)}{h_A(a)} \right] \right\} \quad (16)
\end{aligned}$$

ここで、 $E_{h_A}[\cdot]$ は、 $h_A(a)$ に関する $[\cdot]$ の期待値である。結局、サンプル数 N のモンテカルロ・シミュレーションによって、構造破損確率の推定量は、次式で与えられる。

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \left[1 - F_{\chi^2}(\beta^2) \right] \sum_{i=1}^N \left[P_f(r^{(i)}a^{(i)}) \right] \quad (17)$$

$$P_f(r^{(i)}a^{(i)}) = I_{D_f}(r^{(i)}a^{(i)}) f_A(a^{(i)}) / h_A(a^{(i)}) \quad (18)$$

$$\text{Var}(\hat{P}_f) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[P_f(r^{(i)}a^{(i)}) - \hat{P}_f \right]^2 \quad (19)$$

$$\text{Cov} = \sqrt{\text{Var}(\hat{P}_f)} / \hat{P}_f \quad (20)$$

ここで、 $a^{(i)}, (i=1,2,\dots,N)$ は、方向ベクトルサンプル、 $r^{(i)}, (i=1,2,\dots,N)$ は、動径サンプルであり、 $r^{(i)} = \sqrt{z^{(i)}}$ である。

4 サンプリング確率密度の構築とサンプル生成

4.1 β 超球外部領域への動径サンプル生成

変形カイ2乗確率密度関数 $f_{\chi^2}(z)$ に従う動径サンプルを次の手順で生成する。信頼性指標 β は、あらかじめ決定されているものとする。

Step 1: 区間 $[\beta^2 \sim 100]$ を刻み幅 $\Delta z = 0.01$ で、 l 分割して、確率 $f_{\chi^2}(z_j)\Delta z$ ($j=1,2,\dots,l$) のヒストグラムを構築する。

Step 2: 区間 $[\beta^2 \sim 100]$ 内で、 $f_{\chi^2}(z_j)\Delta z / [1 - F_{\chi^2}(\beta^2)]$, ($j=1,2,\dots,l$) のヒストグラムを構築する。

Step 3: 累積分布 $F_{\chi^2}(z_j) = \sum_{j=1}^l f_{\chi^2}(z_j)\Delta z / [1 - F_{\chi^2}(\beta^2)]$, ($j=1,2,\dots,l$) のヒストグラムを構築する。

Step 4: 一様乱数 $f^{(i)}$ に対応する $F_{\chi^2}(z_j)$, ($j=1,2,\dots,l$) の逆関数値に対応する $z_j^{(i)}$ を決定する。

このようにして生成した $z_j^{(i)}$ を決定して、動径サンプル $r^{(i)} = \sqrt{z_j^{(i)}}$ を式(18)に代入する。以上、動径サンプル生成の手順の概念図を図1に示す。

4.2 方向重点サンプリング確率密度の構築と方向ベクトルサンプル生成⁵⁾

まず、単一破損モードの場合の方向重点サンプリング確率密度の構築法とサンプル生成法を以下に示す。

k 次元の標準化直角座標系における設計点を $\mu_\beta = (\mu_{1\beta}, \mu_{2\beta}, \dots, \mu_{k\beta})^T$ とする。標準正規確率

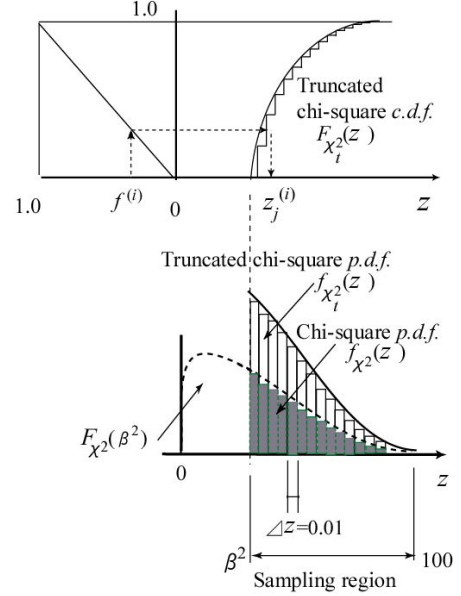


Fig. 1 Generation of a sample $z_j^{(i)}$ corresponding to the histogram of truncated chi-square c.d.f. $F_{\chi^2}(z_j)$.

密度関数を原点から設計点へ平行移動して、これをサンプリング関数としてサンプル $u^{(i)}$ を生成する。次に、このサンプル点と原点を結ぶ方向から方向ベクトルサンプル $a^{(i)}$ を決定し、その方向ベクトル $a^{(i)}$ における方向重点サンプリング確率密度の値 $h_A(a^{(i)})$ を次のように決定する⁵⁾。

$$h_A(a^{(i)}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta a} \int_{D_{\Delta a}^{(i)}} h_U(u) du \right] \quad (21)$$

$$D_{\Delta a}^{(i)} = \left\{ u \mid a^{(i)} \leq a \leq a^{(i)} + \Delta a, \quad 0 \leq r \leq \infty \right\} \quad (22)$$

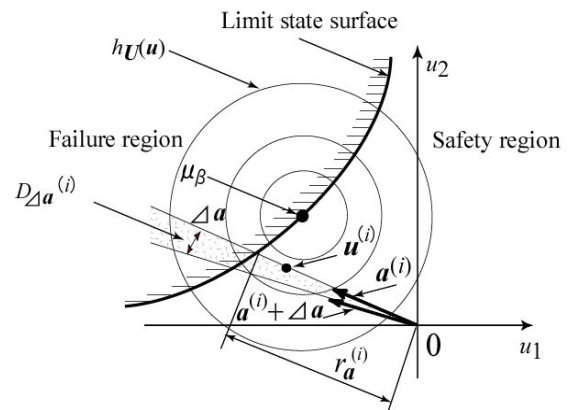


Fig. 2 A directional vector sample $a^{(i)}$ relevant to a sampled point $u^{(i)}$ and an infinitesimal hyperconical domain $D_{\Delta a}^{(i)}$ in the 2-dimensional space⁵⁾.

2次元($k=2$)直角座標系における限界状態曲面の設計点に中心をもつサンプリング関数 $h_U(u)$ から生成された基本確率変数のサンプル $u^{(i)}$ と原点を結ぶ方向の方向ベクトルサンプル $a^{(i)}$ および微小立

体角増分 Δa が張る超円錐領域 $D_{\Delta a}^{(i)}$ の概念図を図 2 に示す。

ここで、サンプリング関数 $h_U(\mathbf{u})$ を $\mathbf{u} = r\mathbf{a}$ の関係を用いて次のように書き換える。

$$\begin{aligned} h_U(\mathbf{u}) &= h(r\mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(ra_1 - \mu_{1\beta})^2 + \cdots + (ra_k - \mu_{k\beta})^2\right]\right\} \\ &= A_h(\mathbf{a})f_R(r\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (23)$$

$$A_h(\mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{(k-1)/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^k \mu_{j\beta}^2 - \left(\sum_{j=1}^k \mu_{j\beta} a_j\right)^2\right]\right\} \quad (24)$$

$$f_R(r\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(r - \sum_{j=1}^k \mu_{j\beta} a_j\right)^2\right\} \quad (25)$$

微小超円錐領域 $D_{\Delta a}^{(i)}$ に含まれる方向重点サンプリング確率密度の確率体積は、次のように算定される。

$$\int_{D_{\Delta a}^{(i)}} h_U(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_{\mathbf{a}^{(i)} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{a}^{(i)} + \Delta \mathbf{a}} \int_{0 \leq r \leq \infty} A_h(\mathbf{a}) f_R(r\mathbf{a}) r^{(k-1)} dr d\mathbf{a} \quad (26)$$

式(26)の r の積分範囲は、 $0 \leq r \leq \infty$ であるが、積分区間を有限個 m の区間に分割し、微小区間幅 Δr の区分積分によって、式(26)を次のように近似的に表す。

$$\int_{D_{\Delta a}^{(i)}} h_U(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx A_h(\mathbf{a}^{(i)}) \sum_{q=1}^m f_R(r^{(q)} \mathbf{a}^{(i)}) \left(r^{(q)}\right)^{(k-1)} \Delta r \Delta \mathbf{a} \quad (27)$$

ここで、 $r^{(q)} = q\Delta r$ ($q=1, 2, \dots, m$) である。

以上より、方向ベクトルサンプル $\mathbf{a}^{(i)}$ に対する方向重点サンプリング確率密度の値 $h_A(\mathbf{a}^{(i)})$ を、等価的に次式で算定する。

$$\begin{aligned} h_A(\mathbf{a}^{(i)}) &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta a} \int_{D_{\Delta a}^{(i)}} h_U(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right] \\ &\approx A_h(\mathbf{a}^{(i)}) \sum_{q=1}^m f_R(r^{(q)} \mathbf{a}^{(i)}) \left(r^{(q)}\right)^{(k-1)} \Delta r \end{aligned} \quad (28)$$

以上の手順により、限界状態曲面の設計点に中心をもつ重点サンプリング確率密度関数 $h_U(\mathbf{u})$ からサンプル $\mathbf{u}^{(i)}$ を生成するたびに、 $\mathbf{a}^{(i)}$ を決定し、式(28)を算定して、あたかも具体的な方向重点サンプリング確率密度関数 $h_A(\mathbf{a})$ から方向ベクトルサンプル $\mathbf{a}^{(i)}$ を生成したごとく、方向重点サンプリング確率密度の値 $h_A(\mathbf{a}^{(i)})$ を等価的に算出し、式(18)の方向重点サンプリングの効果係数 $f_A(\mathbf{a}^{(i)})/h_A(\mathbf{a}^{(i)})$ を決定する。

次に、多破損モードの場合の方向重点サンプリング確率密度の構築法を以下に示す。

多破損モードを有する構造システムの場合、

m 個の破損モードの限界状態曲面の設計点座標を $\boldsymbol{\mu}_{\beta_l} = (\mu_{1\beta_l}, \mu_{2\beta_l}, \dots, \mu_{k\beta_l})^T$, $l = (1, 2, \dots, m)$ とすると、各設計点 $\boldsymbol{\mu}_{\beta_l}$ に中心をもつサンプリング関数 $h_{U_{\beta_l}}(\mathbf{u})$, $l = (1, 2, \dots, m)$ は、次式で表される⁵⁾。

$$\begin{aligned} h_{U_{\beta_l}}(\mathbf{u}) &= h_{U_{\beta_l}}(r\mathbf{a}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(ra_1 - \mu_{1\beta_l})^2 + \cdots + (ra_k - \mu_{k\beta_l})^2\right]\right\} \\ &= A_{h_l}(\mathbf{a})f_{R_l}(r\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、2つの関数 $A_{h_l}(\mathbf{a})$, $f_{R_l}(r\mathbf{a})$, $l = (1, 2, \dots, m)$ は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} A_{h_l}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{(2\pi)^{(k-1)/2}} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^k \mu_{j\beta_l}^2 - \left(\sum_{j=1}^k \mu_{j\beta_l} a_j\right)^2\right]\right\} \end{aligned} \quad (30)$$

$$f_{R_l}(r\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(r - \sum_{j=1}^k \mu_{j\beta_l} a_j\right)^2\right\} \quad (31)$$

結局、 l 番目の破損モードのサンプリング関数式(29)から生成されるサンプル $\mathbf{u}^{(i)}$ に対応する方向ベクトルサンプル $\mathbf{a}^{(i)}$ に対する方向重点サンプリング確率密度関数の等価的な値 $h_{A_{\beta_l}}(\mathbf{a}^{(i)})$, $l = (1, 2, \dots, m)$ を次のように決定する。

$$\begin{aligned} h_{A_{\beta_l}}(\mathbf{a}^{(i)}) &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta a} \int_{D_{\Delta a}^{(i)}} h_{U_{\beta_l}}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right] \\ &\approx A_{h_l}(\mathbf{a}^{(i)}) \sum_{q=1}^m f_{R_l}(r^{(q)} \mathbf{a}^{(i)}) \left(r^{(q)}\right)^{(k-1)} \Delta r \end{aligned} \quad (32)$$

実際のシミュレーションにおいては、次式で定義される各破損モードの重要度⁶⁾

$$w_l = \Phi(-\beta_l) / \sum_{l=1}^m \{\Phi(-\beta_l)\} \quad (33)$$

に応じて、一様乱数を用いて破損モード l , $l = (1, 2, \dots, m)$ を選択する。ここで、 $\Phi(\cdot)$ は、標準正規確率分布関数である。選択された破損モード l の限界状態曲面の上の設計点重点サンプリング確率密度関数式(29)をサンプリング関数として、 i 番目のサンプル $\mathbf{u}^{(i)}$ を生成し、対応する方向ベクトル $\mathbf{a}^{(i)}$ を決定し、式(32)を用いて方向重点サンプリング確率密度を

$$h_A(\mathbf{a}^{(i)}) = w_l h_{A_{\beta_l}}(\mathbf{a}^{(i)}) \quad (34)$$

として、式(18)に適用する。

5 数値計算例

全ての確率変数は互いに独立で、時間に依存しない正規確率変数とする。提案手法を Proposed、多破損モードに対応する設計点座標を用いた多峰性重点サンプリング

グ・シミュレーション⁶⁾を M.I.S., 単一破損モードに対応する設計点に中心をもつ重点サンプリング・シミュレーション⁶⁾を I.S., β 超球領域外のサンプリングと方向シミュレーションにおける方向ベクトルサンプル生成法を結合した手法⁴⁾を S.L.S.R., 方向シミュレーション²⁾を D.S.と表す.

各表における N は, 式(20)で算定される Cov が 0.01 の時のサンプル数, CPU time は, シミュレーション時間, Δz は, 変形カイ 2 乗確率密度のヒストグラムの幅であり, 0.01 とする. 式 (27) で, $\Delta r = 0.01$, $m = 900$ とする. なお, Proposed と M.I.S.や I.S.における設計点座標は, 既知として, これを求める所要計算時間は, 表中の CPU time に含まれていない. また, サンプル数 $N = 10^{11}$ の通常のモンテカルロ・シミュレーションの結果を厳密解として, Exact と表す. なお, 使用計算機・言語は「NEC 製 Value One(Pentium D)」・「Compaq Visual Fortran」である.

【Case 1】一層のラーメン構造

図 3 に示す門型ラーメンに関する構造破損確率を推定する. 部材の曲げモーメント M_j , ($j = 1, 2, \dots, 5$), 荷重を F_j , ($j = 1, 2$)として, 限界状態関数, 基本確率変数の統計データと各種手法による構造破損確率を推定値の比較をそれぞれ, 表 1-1, 1-2, 1-3 に示す.

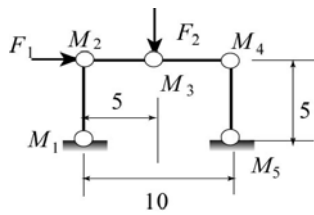


Fig. 3 One-bay one-story frame structure.

Table 1-1 Limit state functions

Mode No.	Limit state function
1	$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 - 5 F_1$
2	$M_2 + 2M_3 + M_4 - 5 F_2$
3	$M_1 + 2M_2 + M_4 + M_5 - 5 F_1 - 5 F_2$

Table 1-2 Statistical data

Variable	Mean value	Standard deviation
M_1, M_2, \dots, M_5	134.9	6.745
F_1	50.0	15.0
F_2	40.0	12.0

Table 1-3 Estimated results (Exact: $P_f = 1.89 \times 10^{-4}$)

Method	N	$\hat{P}_f \times 10^{-4}$	CPU time [sec]
D.S.	722,845	1.860	3.85
M.I.S.	2,368,034	1.868	13.29
S.L.S.R.	3,452,340	1.866	28.14
Proposed	167,743	1.890	2.49

表 1-3 に示すように, 構造破損確率の推定結果には, 各手法の差がないが, 提案手法については, 所要サン

プル数や所要計算時間が, 相対的に小さく, 提案手法が, 効率的であることがわかる.

【Case 2】非線形限界状態関数をもつ構造システム⁷⁾

曲げモーメントが作用する鉄筋コンクリート単鉄筋長方形はり断面の鉄筋断面積を決定する場合の限界状態関数を取り扱う. 限界状態関数の各変数は, x_1 は鉄筋の断面積, x_2 は鉄筋の降伏点強度, x_3 は有効高さ, x_4 は断面の幅, x_5 はコンクリートの円柱供試体の強度, x_6 は強度算定修正係数, x_7 は死荷重曲げモーメント, x_8 は活荷重曲げモーメント, x_9 は曲げモーメント算定修正係数であり, 限界状態関数, 統計データと各種手法の比較をそれぞれ, 表 2-1, 2-2, 2-3 に示す. この構造システムの信頼性指標は, 4.35 である⁷⁾. 設計点座標と信頼性指標 β を表 2-4 に示す.

Table 2-1 Limit state function

Mode No.	Limit state function
1	$x_1 x_2 \left(x_3 - \frac{x_1 x_2}{1.7 x_4 x_5} \right) x_6 - (x_7 + x_8) x_9$

Table 2-2 Statistical data

Variable	Mean value	Standard deviation
x_1	75.49	75.49 × 0.03
x_2	3,300.0	3,300.0 × 0.04
x_3	84.92	84.92 × 0.05
x_4	100.0	100.0 × 0.05
x_5	288.0	288.0 × 0.20
x_6	1.0	1.0 × 0.1
x_7	6,061,000.0	6,061,000.0 × 0.05
x_8	2,564,000.0	2,564,000.0 × 0.35
x_9	1.0	1.0 × 0.1

Table 2-3 Estimation results (Exact: $P_f = 1.348 \times 10^{-5}$)

Method	$\hat{P}_f \times 10^{-5}$	N	CPU time [sec]
D.S.	1.360	246,712	71.14
M.I.S.	1.343	2,447,514	68.29
S.L.S.R.	1.364	20,547,729	206.1
Proposed	1.367	655,404	11.89

Table 2-4 Coordinates of design points and respective reliability indices

Variable	Design point No.1	Design point No.2
x_1	-0.765	0.218
x_2	-0.865	0.0677
x_3	-1.171	-0.159
x_4	-0.013	-0.100
x_5	-0.317	-4.480
x_6	-3.034	0.1165
x_7	0.554	0.109
x_8	1.820	0.057
x_9	1.7417	0.117
β	4.322	4.494

表 2-3 に示すように, 構造破損確率の推定結果には,

各手法の差がない。特に、所要サンプル数や所要計算時間に関して、提案手法が効率的であることがわかる。ただし、D.S.は、シミュレーションの所要サンプル数が一番少ないが、所要計算時間が相対的に多く要している。この理由は、限界状態関数が非線形の場合、D.S.においては、原点からサンプル方向への限界状態曲面までの距離の算定に繰り返し計算が必要であり、本研究では、2分法を用いてこれを行っており、計算時間を要したことによる。

【Case 3】トラス構造⁸⁾

図4に示すトラス構造の構造破損確率を推定する。限界状態関数、その基本確率変数である軸力変数 T_j ($j=1, 2, \dots, 10$)および荷重変数 F_j ($j=1, 2$)の統計データと各種手法の比較をそれぞれ、表3-1、3-2、3-3に示す。

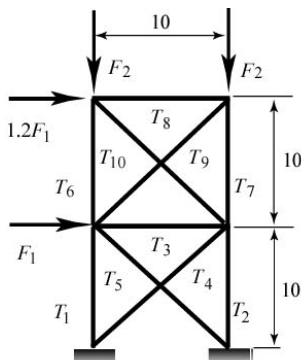


Fig. 4 A ten member truss structure for Case 3.

Table 3-1 Limit state functions

Mode No.	Limit state function
1	$0.7071T_4 + 0.7071T_5 - 2.2F_1$
2	$T_6 + 0.7071T_{10} - 1.2F_1 - F_2$
3	$T_3 + 0.7071T_5 + 0.7071T_{10} - 2.2F_1$
4	$T_8 + 0.7071T_{10} - 1.2F_1$
5	$T_6 + T_7 - 1.2F_1$
6	$T_3 + 0.7071T_5 + T_6 - 1.2F_1 - F_2$
7	$0.7071T_9 + 0.7071T_{10} - 1.2F_1$
8	$T_1 + 0.7071T_5 - 3.4F_1 - F_2$

Table 3-2 Statistical data

Variable	Mean value	Standard deviation
T_1, T_2	90.0	13.5
T_3	9.0	1.35
T_4, T_5	48.0	7.20
T_6, T_7	21.0	3.15
T_8	15.0	2.25
T_9, T_{10}	30.0	4.50
F_1	11.0	3.30
F_2	3.6	0.72

Table 3-3 Estimation results (Exact: $\hat{P}_f = 5.08 \times 10^{-5}$)

Method	$\hat{P}_f \times 10^{-5}$	N	CPU time [sec]
D.S.	5.11	2,448,691	17.43
M.I.S.	5.07	2,760,412	16.10
S.L.S.R.	5.09	28,206,985	295.7
Proposed	4.98	837,000	15.9

表3-3に示すように、所要サンプル数や所要計算時間に関して、提案手法が最も効率的であることがわかる。

6 結言

領域分割法に基づき、サンプリング領域を β 超球領域外に限定して、効率的に動径変数サンプルを生成するとともに、方向重点サンプリング確率密度を等価的に決定して、方向重点サンプリングに基づいて方向ベクトルサンプルを生成するという2種の分散減少法を結合した効率的なモンテカルロ・シミュレーションに基づく、構造破損確率の推定法を提案した。方向シミュレーション(D.S.)、多峰性重点サンプリング・シミュレーション(M.I.S.)、 β 超球領域外のサンプルと方向シミュレーションを結合した手法(S.L.S.R.)などの手法に比べて、提案手法は、精度よく相対的に効率よく構造破損確率の推定量を与えることが判った。

参考文献

- 1) Rubinstein, R. Y., *Simulation and The Monte Carlo Method*, John Wiley & Sons, p. 114, 1981.
- 2) Bjerager, P., "Probability integration by directional simulation," *J. of Eng. Mechanics, (ASCE)*, **114**, pp. 1285-1302, 1988.
- 3) Harbitz, A., "An efficient sampling method for probability of failure calculation," *Structural Safety*, **3**, pp. 109-115, 1986.
- 4) Yonezawa, M., Okuda, S. and Park, Y., "Structural reliability estimation based on simulation within limited sampling region," *Int. J. Production Economics*, 60-61, pp. 607-612, 1999.
- 5) 奥田 昇也, 小林 宏彰, 米澤 政昭, "方向重点サンプリング・シミュレーションに基づく構造システムの破損確率推定法 —設計点方向重点サンプリング確率密度関数の構築法—," 日本機械学会論文集 (A 編) 79 巻, 801 号, pp. 609-619, 2013.
- 6) Schuëller, G. I. and Stix, R., "A critical appraisal of methods to determine failure probabilities," *Structural Safety*, **4**, pp. 293-309, 1987.
- 7) 長 尚, 基礎知識としての構造信頼性設計(改訂新版), 山海堂, pp. 103-104, 1996.
- 8) 小野徹郎, 井戸田秀樹, 戸塚明宏, 高次積率標準化手法を用いた構造系の信頼性評価法, 日本建築学会構造系論文報告, 418, pp. 71-79, 1990