

Composite pulses for NMR measurements

複合パルスの NMR 測定への応用

K. Matsushima, M. Bando, T. Ichikawa*, M. Nakahara, Y. Kondo

Kinki University

3-4-1 Kowakae, Higashi-Osaka, Osaka, Japan

** Gakushuin University*

Toshima, Tokyo 171-8588, Japan

(Received December 20, 2013)

概要

Quantum operations robust against random noise and systematic errors are essential ingredients in the quantum control. We have theoretically studied such robust quantum operations against the errors, that consist of several elementary operations and are called composite quantum gates. In this article, we experimentally discuss the robustness of various composite quantum gates by using NMR (Nuclear Magnetic Resonance) that is one of the most familiar quantumly controlled systems.

量子制御には乱雑なノイズや系統的なエラーの影響を受け難い量子操作が必要である。我々は今までエラー耐性を持つ量子操作（複数の基本的な量子操作を組み合わせた複合量子ゲート）の理論的な研究を主に行ってきた。本稿では、最も身近な量子制御である NMR（核磁気共鳴）を用いて、様々な複合量子ゲートのエラー耐性を実験的に調べる。

keywords: quantum control, quantum gate, NMR, composite pulse.

1 はじめに

今日、量子制御は様々な分野で行われている。例えば、NMR（核磁気共鳴）や MRI（磁気共鳴画像法）は量子制御の一種と考えることができる。そこでは、試料や人体内部の量子力学的な対象（スピン）を制御・観測することで、分子構造や人体内部の情報を得ている。実際の測定では乱雑なノイズや系統的なエラーのために測定精度が悪化している。このようなノイズやエラーに対して耐性がある量子操作が実現できれば、より高精度な測定が可能になる。我々はそのような耐性のある量子操作（量子ゲート）の実装に向けての基礎研究を行っている。

エラーの影響を受け難い量子操作として、複数の量子操作を組み合わせることでエラーの影響を打ち消す“複合量子ゲート”が提案されている¹⁾。NMR 測定では、複数のパルスを組み合わせて作用させることに対応する。我々は今まで、「複合量子ゲートが如何にしてエラー耐性を持つか？」についての理論的考察を主として行ってきたが²⁾、実験による詳細な検証は行っていない。NMR は我々にとって身近な量子制御であり、量子制御と制御される量子力学的な対象（スピン）の対応関係が分かりやすいシステムでもある。この点に注目して、NMR 装置を用いた複合量子ゲート（パルス）の有用性の実験的検証を行った。

2 量子ゲートとエラー

図 1 のような Bloch 球上で表されるスピン 1/2 の系に対する量子操作（量子ゲート）を考える。Bloch 球は σ_z の固有値 ± 1 に対応する固有ベクトル $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の状態を北極/南極とした単位球であり、Bloch 球上の極座標で表された一点 (θ, ϕ) で、1 スピンの純粋状態 $\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$ を表現できる。

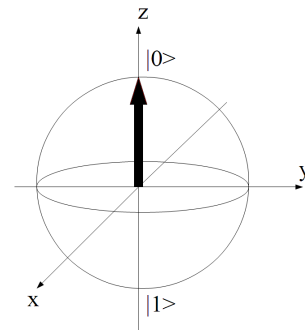


図 1 Bloch 球

強さ $\xi(t)$ で、その向きが単位ベクトル $\mathbf{n}(t)$ で表される“制御磁場”下の 1 スピンの時間発展は以下のハミルトニアンによって、決定づけられる。

$$H(t) = \xi(t)\mathbf{n}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}/2 \quad (1)$$

ここで、成分がパウリ行列 σ_i からなるベクトル $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ を定義した。量子化軸 (z 軸) は静磁場の向きに取る。ただし、静磁場がゼロになるような回転座標系を用いていることに注意のこと。ハミルトニアン H が時間 t に依存しないとき、このハミルトニアンの下での $t = 0$ から T までの時間発展は

$$\exp(-iHT) = \exp(-i\theta \mathbf{n} \cdot \sigma/2) \quad (2)$$

で表すことができる。ただし $\theta = \xi T$ で、この操作は図 2(a) のような Bloch 球上での \mathbf{n} 軸まわりの θ 回転に対応する。我々は NMR による複合量子ゲートの検証を試みるので、NMR 特有の事情 (制御磁場は図 1 の xy 面内にある) を考慮して、 \mathbf{n} を $\mathbf{n}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ とする。 ϕ を用いて時間発展演算子 $\exp(-iHT)$ を $R(\theta, \phi)$ と表す。この $R(\theta, \phi)$ が量子ゲートになる。

我々が量子操作に耐性を持たせたいエラーを 2 つ挙げる。NMR では、これらのエラーが最も重要である。

(1) Pulse length error

式 (2) の θ にエラーがある場合を Pulse length error があると言う。量子制御を行う時間にエラーがないときは、制御磁場の強さのエラーとなる。Pulse length error があるときの状態の時間発展は図 2(b) のようになる。このとき量子ゲート $R'_\epsilon(\theta, \phi)$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned} R'_\epsilon(\theta, \phi) &= \exp(-i\theta(1 + \epsilon)\mathbf{n}(\phi) \cdot \sigma/2) \\ &= (I - i\epsilon\theta\mathbf{n}(\phi) \cdot \sigma/2)R(\theta, \phi) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで I は 2×2 単位行列、 ϵ は Pulse length error の大きさを表し、 $|\epsilon| \ll 1$ と仮定する。

(2) Off-resonance error

xy 面内の制御磁場以外に z 軸向きの静磁場がある場合に発生するエラーを、Off-resonance error と呼ぶ。これはスピンを倒す向きに影響し、スピンの軌跡は図 2(c) のように歪められる。Off-resonance error があるとき、量子ゲート $R'_f(\theta, \phi)$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned} R'_f(\theta, \phi) &= \exp(-i\theta\mathbf{n}(\phi)(1 + fz) \cdot \frac{\sigma}{2}) \\ &= R(\theta, \phi) - if \sin(\theta/2)\sigma_z + O(f^2) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで z は $+z$ 方向の単位ベクトル、 f は Off-resonance error の大きさであり、 $|f| \ll 1$ と仮定する。

上記のエラーが両方あるとき、スピンの軌跡は図 2(d) のようになり、エラーのある量子ゲート $\mathcal{R}'(\theta, \phi)$ は

$$\mathcal{R}'(\theta, \phi) = \mathcal{R}(\theta, \phi, \theta, \sin(\theta/2)) \quad (5)$$

となる。ここで、以下のような \mathcal{R} を導入した。

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\theta, \phi, \delta_\epsilon, \delta_f) \\ = R(\theta, \phi) - i\epsilon\delta_\epsilon(\mathbf{n}(\phi) \cdot \sigma)R(\theta, \phi)/2 - if\delta_f\sigma_z \end{aligned} \quad (6)$$

δ_ϵ と δ_f は一般には行列である。

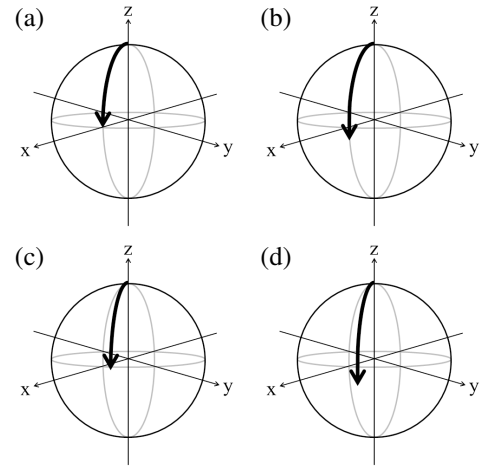


図 2 ブロッチ球上で y 軸まわりに角 $\theta = \pi/2$ だけ量子状態を回転させる場合の軌跡。 \mathbf{y} は y 軸方向の単位ベクトルで、初期状態は $|0\rangle$ としている。(a) エラーやノイズがない場合、(b) Pulse length error がある場合、(c) Off-resonance error がある場合、(d) 両方のエラーがある場合。エラーの大きさは $\epsilon = 0.1, f = 0.1$ である。

エラーを含むなどして回転軸が異なる量子ゲートは一般に非可換である。そのため、複数の量子ゲートを連続して作用させ $R(\theta, \phi_c) = \prod_i R(\theta_i, \phi_i)$ とすると、エラーが互いに干渉しあう。ここで積は左から右へ i の降順にとるものとする。複合量子ゲート (NMR ではパルス) では、 (θ_i, ϕ_i) を適切に決めた複数のパルスを組み合わせて作用させることで、 δ_ϵ や δ_f をゼロにすることができる。これは仮に ϵ や f がゼロでなくても、1 次のオーダーでこれらのエラーの影響を受けない、すなわち、これらのエラーに対する耐性を持つことを意味する。

様々な量子ゲート (パルス) のこれら 2 つのエラーに対する振る舞いを、表 1 と図 3 にまとめた。reduced CORPSE/BB1 とは、BB1 と呼ばれる複合パルスを構成するパルスとして CORPSE を用いた入れ子型複合パルスである。無駄な入れ子構造を省くことで、構成パルス数を減らしている⁶⁾。我々はこのような入れ子型複合パルスを CCCP (ConCatenated Composite Pulse) と呼んでいる。

表 1 様々な量子ゲート (パルス) のエラーに対する振る舞い。複合パルスでは δ_ϵ や δ_f をゼロにすることができ、エラーの影響を受けない。 θ_1 は $\frac{\sin(\theta_1)}{\theta_1} = \frac{2}{\pi} \cos(\frac{\theta}{2})$ より求めることができる。計算の詳細は文献 6) を参考のこと。

量子ゲート (パルス)	エラーに対する振る舞い
単一パルス	$\mathcal{R}(\theta, \phi, \theta, \sin(\theta/2))$
SCROFULOUS ³⁾	$\mathcal{R}(\theta, \phi, 0, 1 + \frac{\pi \sin^2(\theta_1/2)}{\theta_1})^{*1}$
CORPSE ³⁾	$\mathcal{R}(\theta, \phi, \theta, 0)$
BB1 ⁴⁾	$\mathcal{R}(\theta, \phi, 0, \sin(\theta/2))$
reduced CORPSE/BB1 ⁶⁾	$\mathcal{R}(\theta, \phi, 0, 0)$

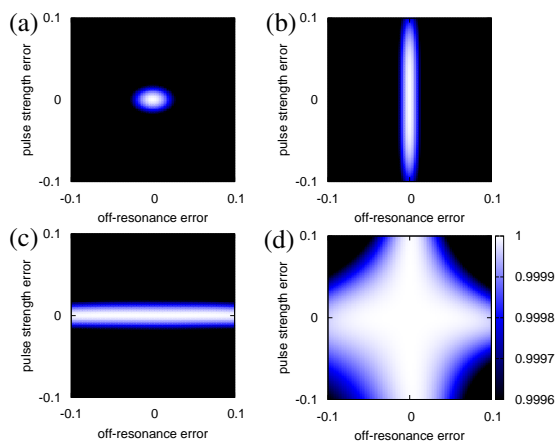


図3 様々な複合量子ゲート（90度パルス）のエラー耐性。(a) 単一パルス、(b) SCROFULOUS、(c) CORPSE、(d) reduced CORPSE/BB1。それぞれ縦軸が Pulse length error、横軸が Off-resonance error の大きさを表す。忠実度の高い部分ほど白く表示される。

3 複合パルスの応用

我々は2台のNMR装置を用いて、複合量子ゲート（パルス）の有用性を調べた。1台は日本電子製の高分解能NMR装置（ECA500）で、もう一台は自作のNMR装置である。

3.1 NMR 測定の原理

簡単のために、ここではスピン $1/2$ を持つ原子核が多数存在する液体試料を考えよう。磁場が存在しない場合には、これらのスピンは熱運動のためにランダムな方向を向いており、巨視的な磁化は現れない。ところが、磁場中ではスピンの伴う磁気モーメントのために磁場に平行・反平行でエネルギー差が生じ、ボルツマン分布に従って、スピンの平行・反平行になる原子核の数の僅かな差が生じる。この差によって、磁場中では試料全体が巨視的な磁化 M を持つ。NMR ではこの巨視的な磁化を測定する。

核スピンが磁場に平行・反平行の場合の個々の原子核のエネルギー差 ΔE は磁場に比例する。また、その比例係数 γ は試料の量に関係なく、すなわち巨視的な磁化の大きさによらず、原子核毎に決まっている。水素の原子核の場合 $\gamma = 42.576 \text{ MHz/T}$ である。この事実は、NMR では原子核1個のスピンというミクロな（量子力学的な）対象を取り扱っていることを意味している。このエネルギー差を $\Delta E = h\nu$ によって周波数 ν に換算したとき、その周波数をラーモア周波数と呼ぶ。ここで h はプランク定数である。

NMR では静磁場の向きを z 軸に取る。従って、熱平衡状態では試料の磁化は z 軸を向いている。ここに、ラーモア周波数で回転する磁場を与えよう。このラーモア周波数で回転する座標系では静磁場はゼロになり、実験室系で回転する磁場は回転座標系の xy 面内で静止することになる。まさに式(1)のハミルトニアンが実現でき、前節の議論がNMRに適用できることが分かる。Off-resonance error は、ラーモア周波数と回転

座標系の回転周波数が一致していない場合に生じるので、そのように呼ばれる。

実験では回転磁場の代わりに振動磁場を与えることが多い。しかし、振動磁場は時計回りと反時計回りの回転磁場の重ね合わせと考えることができるので、振動磁場を用いても回転磁場を与えた場合と同様な議論を行うことができる。

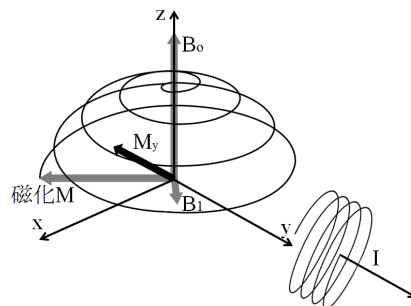


図4 実験室系における振動磁場下の巨視的な磁化の振る舞い。振動磁場を与えることによって、巨視的な磁化の傾きを制御することができる。回転している試料の磁化は、 y 軸に平行なコイルに誘起される起電力によって測定することができる。

3.2 実際の複合量子ゲート（パルス）

今回調べた複合量子ゲート（パルス）は図5の6種類である。⁶⁾ 複合量子ゲート（パルス）は複雑な操作をしていることが分かる。

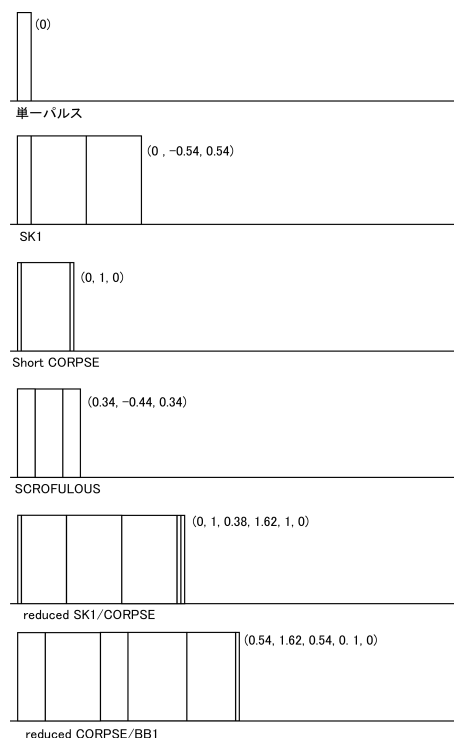


図5 様々な複合パルスによる90度パルス。複合量子ゲート（パルス）を構成する各量子ゲート（パルス）の強さはパルスの幅で、また位相 ϕ_i は (ϕ_1, ϕ_2, \dots) のように表示した。位相の単位は180度である。

3.3 日本電子製の NMR 装置を使った実験

日本電子製の NMR 装置を用いて、様々な複合量子ゲート（パルス）のエラー耐性について調べた。使用した実験装置は ECA500 である。Pulse length error は試料と同程度の大きさの RF コイルにより発生する制御磁場の不均一性（正規分布を仮定すると標準偏差は約 0.05° ）によって導入した。

ここでの目的はある程度精度が高い単一パルスを組み合わせ、より高精度な複合パルスを作ることが可能かどうかを検証することである。

3.3.1 90 度パルス

試料には ^{13}C エンリッチしたクロロホルムを用い、 ^{13}C の核スピンを制御した。プロトンのスピンは WALTZ と呼ばれるデカップリング・パルスで無効化されている。まず、単一パルスと SK1⁵⁾ について、Off-resonance error がない状態で 90 度パルスの比較を行った。90 度パルスを複数回作用させて得られた信号強度を図 6 に示す。

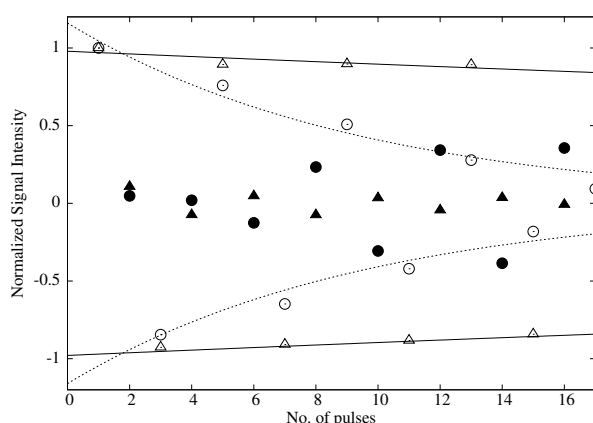


図 6 Pulse length error 下の 90 度パルスの比較。○：単一パルス、△：SK1。それぞれ 90 度パルスを偶数回作用させた点を黒塗りの記号で表した。破線は単一パルス、実線は SK1 の奇数回での信号強度を指数関数でフィットしたものである。

NMR 装置では、磁化 M の xy 面内のある軸方向の成分のみを検出するため、エラーのない 90 度パルスを複数回作用させると、奇数回作用させたとき信号強度が最大、偶数回では信号強度が 0 になるはずである。単一パルスでは、エラーのために作用させる回数を増やすごとにスピンの回転角がずれ、奇数回作用させたときの信号強度が減衰、偶数回作用させたときの信号強度が増大している。12 回目以降では、偶数回と奇数回での信号強度の大小関係が逆転している。これに対し、SK1 では奇数回での信号強度があまり減衰せず、偶数回での信号強度は常に ± 0.1 未満の範囲内にある。以上のことから、SK1 によって 90 度パルスの精度が向上したことが分かる。

次に、Off-resonance error もある場合に、単一パルス、SK1、reduced CORPSE/BB1 について比較する。RF パルスの周波数をラーモア周波数から 4 ppm (503 Hz) ずらすことによって、 $f = 0.05$ の Off-resonance error を導入した。90 度パルスの強さはその回転に必要なパルスの時間 $24.2 \mu\text{s}$ から計算した。3 種類の 90 度パルスを複数回作用させて得られた際の信号強度を図 7 に示す。

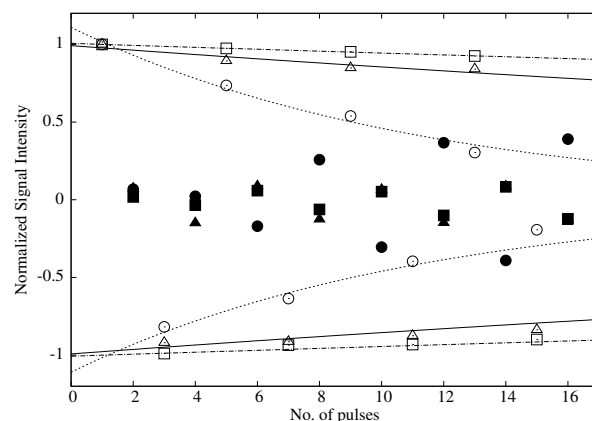


図 7 Pulse length error と Off-resonance error 両方がある場合の 90 度パルスの比較。○：単一パルス、△：SK1、□：reduced CORPSE/BB1。それぞれ 90 度パルスを偶数回作用させた点を黒塗りの記号で表した。破線は単一パルス、実線は SK1、鎖線は reduced CORPSE/BB1 の奇数回での信号強度を指数関数でフィットしたものである。

単一パルスでは Pulse length error のみの場合と同様、90 度パルスを奇数回作用させたときの信号強度が大きく減衰している。また、SK1 は Off-resonance error に耐性を持たないため、Pulse length error のみの場合よりも信号が減衰している。これに対し、reduced CORPSE/BB1 では信号強度の減衰が SK1 よりも小さい。以上により、reduced CORPSE/BB1 が両方のエラーに耐性を持つことが確認できた。

なお、この試料の T_2 は約 0.3 s であった。一方、図 6 の SK1 と図 7 の reduced CORPSE/BB1 の信号の見かけの T_2 はそれぞれ $27 \pm 7 \text{ ms}$ と $33 \pm 4 \text{ ms}$ であった。よってこれらの減衰は、パルスの残された不完全性によるものと考えられる。

3.3.2 180 度パルス

試料には ^{13}C エンリッチしたアラニンを用い、3 個ある C の内 α -carbon⁷⁾ の核スピンを制御した。ここでは、off-resonance error を主として調べることにし、他の炭素原子からのスカラー結合によるラーモア周波数のシフトを off-resonance error と見なしている。これにより、正と負それぞれ 2 個の f の値についての振る舞いを同時に調べることができる。

図 8 に単一パルス、SCROFULOUS、Short CORPSE、reduced SK1/CORPSE⁶⁾、reduced CORPSE/BB1 によって 180 度パルスを 1 回与えた後のスペクトラムの比較を行った。

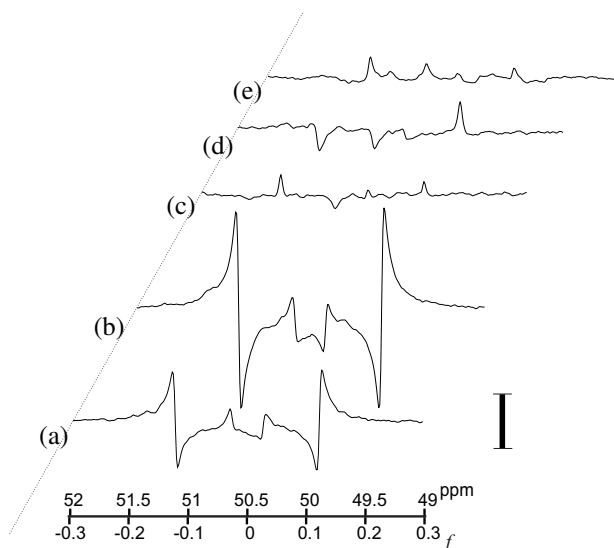


図 8 様々な 180 度パルスによって得られたスペクトル。(a) 単一パルス、(b) SCROFULOUS、(c) Short CORPSE、(d) reduced SK1/CORPSE、(e) reduced CORPSE/BB1。横軸は化学シフト [ppm] と、それに対応した Off-resonance error の大きさ f である。単一パルスのスペクトルの右側に、比較のために 90 度パルスの信号強度の 20% の長さを示した。

180 度パルスを 1 回作用させると、スピンは $-z$ 方向に倒れ磁化の xy 面内成分は 0 になるので、信号は得られないはずである。ところが図 8(a) のように単一の 180 度パルスでは off-resonance error のために信号が出ている。これは、off-resonance error が大きいほど（両端のピークの方が）より大きな信号が出ていることから明らかである。(c) Short CORPSE と (d) と (e) の入れ子型複合パルスは off-resonance error に耐性を持つため、ほとんど信号がなくなった。Pulse length error のみに耐性を持つ SCROFULOUS では、悪化した。これは図 5 から分かるように、パルス操作に必要な時間が長くなってしまからである。

様々な 90 度と 180 度パルスと比較することにより、各複合パルスのエラー耐性が確認できた。通常の複合パルスでは 1 種のエラーにしか耐性を持たないため、実験条件に応じて使い分ける必要がある。入れ子型複合パルスは複雑ではあるが、2 種のエラー両方に耐性を持つため、より汎用性が高い。

3.4 自作 NMR 装置による実験

図 9 に示す自作 NMR 装置を用いて、SCROFULOUS の振る舞いについて調べた。ここでの目的は JEOL の ECA500 を使った場合と異なり、非常に簡易な構成の自作の NMR 装置でもパルスの特性を改善できるかどうかを調べることである。

3.4.1 装置

この装置では電磁石によって静磁場を発生させている。任意波形発生器（NF 社製 WF1974）からのパルスをパワーアンプで増幅し、励起用コイル（サドルコイル）に供給する。この高周波電流が振動する制御磁場を作り、試料中の水素の原

子核を制御する。水素の原子核に起因する磁化によって検出コイルに誘導起電力が生じる。この電圧をプリアンプ（NF 社製アンプ・モジュール CA-251F4、Gain= 40 dB）で増幅した後、オシロスコープで読み取る。一連の動作を 512 回繰り返し、積算した信号をオシロスコープ備え付きの高速フーリエ変換機能でパワー・スペクトルに変換する。このスペクトルのピーク値を NMR 信号とした。従って、位相に関する情報は失われていることに注意する必要がある。

試料には mol 濃度 $2.3 \times 10^{-2} \text{ mol/l}$ の硫酸銅水溶液を用いて縦緩和時間を短くして、高速に繰り返し測定ができるようにした。具体的なコイルのパラメータは、サドルコイルのインダクタンスが 0.015 mH、受信用コイルのインダクタンスが 0.027 mH である。受信用のコイルの直径は 5 mm、長さも 5 mm である。試料の硫酸銅水溶液はこの受信用コイルの中のみ存在する。静磁場強度 56 mT で実験を行った。

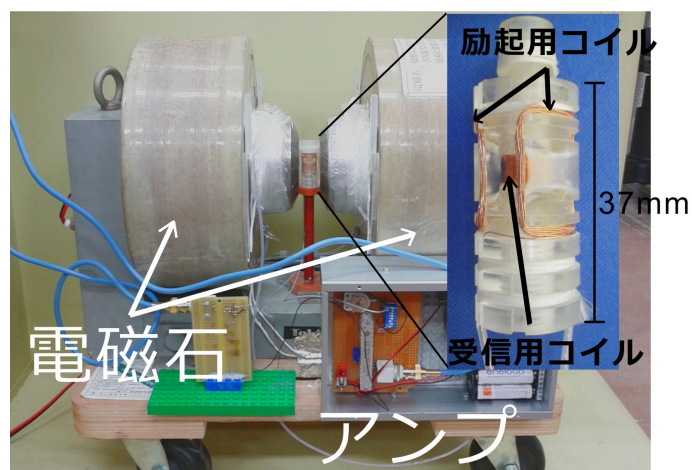


図 9 自作 NMR 装置

3.4.2 縦緩和時間 T_1 測定 (Double pulse)

熱平衡状態からずれた磁化が z 軸方向に回復する過程を縦緩和といい、緩和の様子は指数関数で表される。磁化を反転させた後の縦磁化の時間変化は図 10 のようになる。通常 T_1 測定では、磁化反転後の磁化の緩和を測定することが多いが、より大きく変化する信号を測定することによって測定精度を向上させるためである。 z 軸方向の磁化は通常の NMR では測定できないので、磁化の回復の様子は待ち時間 τ 後に 90 度パルス作用させることによって、 z 軸方向の磁化を xy 面内に倒して検出する。

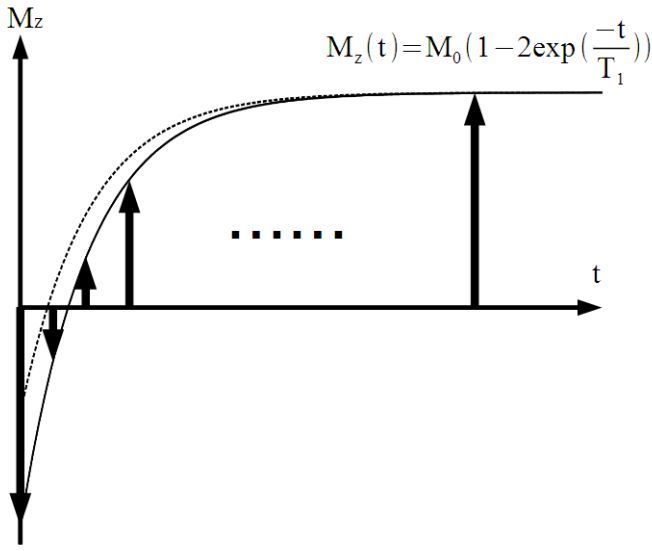


図 10 z 軸方向の磁化の緩和。 M_0 は熱平衡状態の磁化の大きさである。磁化反転した直後を $t = 0$ としている。点線は不完全な磁化反転後の磁化の緩和の様子である。ここでは、静磁場の不均一性による xy 面内の磁化の緩和時間 T_2^* は T_1 より十分短いと仮定して、 z 軸方向の磁化のみを描いている。

磁化反転には 180 度パルスを使えば良いが、必ずしも正確な 180 度パルスを実現できない場合もある。この場合に期待される信号強度の待ち時間 τ 依存性は、

$$V(\tau) = \left| (V' + V_0) \left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{T_1}\right) \right) - V' \right| \quad (7)$$

となる。 V' は $\tau = 0$ s での信号強度、 V_0 は $\tau \rightarrow \infty$ での信号強度で熱平衡状態の磁化に対応している。信号の位相情報が失われているために絶対値がついていることに注意のこと。この場合には、図 10 の点線のような磁化の緩和を測定してフィッティングによって T_1 を決定する必要がある。

市販の NMR 装置を使うことができ、単一のパルスによる磁化反転にある程度の精度が期待できる場合には $V(\tau) = 0$ となる τ_0 から $T_1 = \tau_0 / \ln 2$ によって T_1 を求めるゼロクロス法を用いることが多い。しかし単一のパルスによる磁化反転に大きなエラーがあるような自作の NMR 装置を使用する場合には $\tau = 0$ における磁化が $| -M_0 |$ より小さくなり、ゼロクロス法は使用できない。しかしながら、複合パルスを用いてエラーを補償することができれば、ゼロクロス法も使用できると期待できる。ここでは磁化反転に単一パルスと SCROFULOUS を用いた二通りの方法で、 T_1 を測定した。なお、90 度パルスにはどちらも単一パルスを用いた。

それぞれの測定データと (7) 式でフィットした結果を図 11 に示す。実験データを (7) 式でフィットして得られた T_1 とゼロクロス法によって求めた T_1' を表 2 にまとめた。

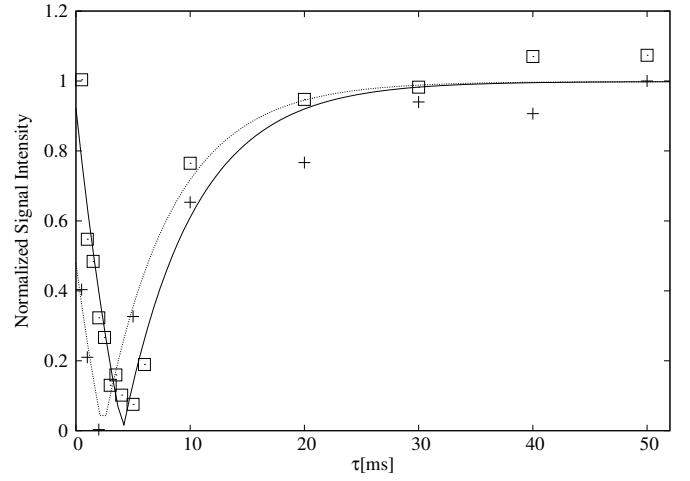


図 11 T_1 測定。 + : 180 度パルスにも単一パルスを使用した場合と □ : 180 度パルスには SCROFULOUS を用いた場合。破線は単一パルス、実線は SCROFULOUS のデータを (7) 式でフィットしたものである。

表 2 T_1 測定における諸定数計算結果

	T_1 [ms]	T_1' [ms]	V_0 [μ V]	V' [μ V]
single	6.0 ± 0.7	3.3	57 ± 4	27 ± 3
SCROFULOUS	6.3 ± 0.7	6.2	60 ± 5	55 ± 5

単一パルスと SCROFULOUS のデータを (7) 式でフィットして得られた T_1 は、誤差の範囲内で一致した。次に、ゼロクロス法より求めた T_1' を比較する。磁化反転に単一パルスを用いた測定に対してゼロクロス法を適用すると $T_1' = 3.3$ ms となり、フィッティングによって得られた結果と大きく異なった。一方、SCROFULOUS を用いた測定に対してゼロクロス法を適用して得られた結果はフィッティングの結果と誤差の範囲で一致している。以上のことから、SCROFULOUS により 180 度パルスが改善できたと考えられる。

4 最後に

より精密な量子制御を実現するための方法として研究されてきた複合量子ゲート (パルス) は、複数の量子制御を組み合わせることによってエラーによる影響を打ち消すものである。本稿では、もっとも身近な量子制御である NMR を用い、単一パルスと様々な複合パルスを比較することで、複合パルスの有用性を実証した。特に、非常に簡易な構成の自作の NMR 装置でもエラー耐性が確認できたことから、複合パルスは未知の要素が多い条件下においても有効な手法であることが分かった。複合パルスが工学系や理学系の幅広い分野の発展に貢献することを期待する。

本研究は財団法人日本科学協会笹川科学研究助成、文部科学省オープン・リサーチ・センター整備事業および日本学術振興会科学研究費基盤研究 (C) 23540470 と 25400422 の助成を受けて行われました。ここに感謝いたします。

67 (2003) 042308.

参考文献

1) J. A. Jones: J. Ind. Inst. Sci. **89** (2009) 303.

2) 坂東将光、市川翼、近藤康、中原幹夫：日本物理学会誌 **68** (2013) 459-563.

3) H. K. Cummins, G. Llewellyn, and J. A. Jones : Phys. Rev. A

4) S. Wimperis : J. Magn. Reson. A **109** (1993) 221.

5) K. R. Brown, A. W. Harrow, and I. L. Chuang : Phys. Rev. A **70** (2004) 052318.

6) M. Bando, T. Ichikawa, Y. Kondo, M. Nakahara : J. Phys. Soc. Jpn. **82** (2013) 014004.

7) Y. Kondo : J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 104004.